

УДК 677.017.4:531

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ
ЖЕСТКОСТИ НИТИ ПРИ КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ**

**THEORETICAL BASIS AND EXPERIMENTAL DETERMINATION
OF TWISTED AND BENT THREAD RIGIDITY**

*В.П. ЩЕРБАКОВ, О.Ю. ДМИТРИЕВ, И.Б. ЦЫГАНОВ, Н.С. СКУЛАНОВА, Е.Р. ПОПОВА
V.P. SHCHERBAKOV, O.YU. DMITRIEV, I.B. TSYGANOVA, N.S. SKULANOVA, E.R. POPOVA*

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)
(Moscow State Textile University "A.N. Kosygin")

E-mail: office@msta.ac.ru

Изложены теоретические основы экспериментального определения жесткости нити при кручении и изгибе. Даны описания приборов и устройств, методик нахождения жесткостных характеристик нитей и пряжи. Приведены результаты эксперимента и расчета жесткости нити при кручении и жесткости нити при изгибе.

Theoretical basis of experimental definition of thread rigidity when twisting and bending have been presented. The description of devices and units, methods of finding thread and yarn rigidity characteristics are given. The results of the experiment and calculation of twisted and bent thread rigidity are presented.

Ключевые слова: нить, равновесие, кручение, нелинейный изгиб, жесткость, силы, моменты, контактная нагрузка.

Keywords: a thread, balance, twisting, a nonlinear bend, rigidity, forces, moments, contact loading.

Почти любой расчет крученого продукта предполагает знание его жесткостных характеристик. Клебшем были предложены уравнения, основанные на пропорциональности компонентов кривизны и кручения при деформировании компонентам главного момента внутренних усилий:

$$M_1 = A_{11}(\kappa_1 - \kappa_{10}),$$

$$M_2 = A_{22}(\kappa_2 - \kappa_{20}),$$

$$M_3 = A_{33}(\kappa_3 - \kappa_{30}),$$

где κ_1 – кручение и кривизна в естественном (недеформированном) состоянии, κ_1 – кручение осевой линии нити, возникающее при скручивании элемента нити крутящим

моментом M_1 ; κ_2 и κ_3 – проекции кривизны пространственной осевой линии при изгибе нити в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях под действием моментов M_2 и M_3 ; A_{11} – жесткость при кручении; A_{22} и A_{33} – жесткости при изгибе. Величины A_{ij} определяются соотношениями:

$$A_{11} = B = GJ_p,$$

$$A_{22} = A_{33} = H = EJ,$$

где E – модуль упругости; G – модуль сдвига; $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инер-

ции площади сечения; $I = \frac{\pi d^4}{64}$ – осевой

момент инерции (поперечное сечение нити принято в форме круга диаметром $d = 2r$).

В [1] получены выражения для основных силовых факторов, определяющих равновесную структуру крученой нити: приведенная к осевой линии нити контактная нагрузка $q_0 = GI_p \frac{1}{4R^3(1+e)}$; осевая

сила (натяжение) $T = GI_p \frac{1}{4R^2(1+e)}$; попе-

речная (перерезывающая) сила $Q = GI_p \frac{\sqrt{1+2e}}{4R^2(1+e)}$; изгибающий и крутя-

щий моменты $M_{\text{и}} = EI \frac{1}{2R(1+e)}$;

$M_{\text{к}} = GI_p \frac{\sqrt{1+2e}}{2R(1+e)}$. Здесь введено обозна-

чение отношения жесткостей $e = \frac{EI}{GI_p} = \frac{H}{B}$.

Для числовой оценки сил и моментов нужны данные жесткостных характеристик $EI = H$ и $GI_p = B$. Теория и методика определения величин H и B дается в настоящей статье.

Рассмотрим упругую нить с круговым поперечным сечением, нагруженную по торцам двумя моментами [2]. Двумя поперечными сечениями выделим из нити элемент длиной dz , а из него двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $(r+dr)$ – элементарное кольцо, показанное на рис. 1 (кручение элемента нити).

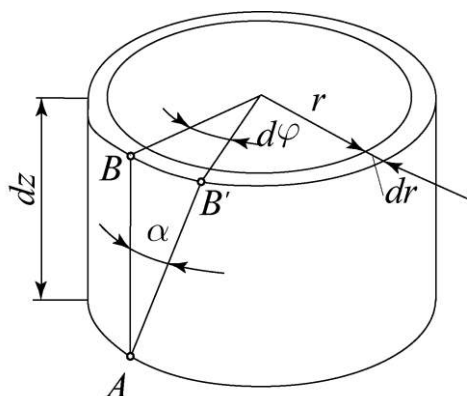


Рис. 1

Верхнее торцевое сечение поворачивается при кручении относительно левого на угол $d\phi$. Образующая цилиндра AB поворачивается при этом на угол α и занимает положение AB' . Перемещение BB' $du = rd\phi$, и в то же время $du = dz \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{r}. \quad (1)$$

Отношение $\frac{d\phi}{dz} = \theta$ называется относительным углом закручивания и представляет собой угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними. Угол θ соответствует относительно-му удлинению $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ при растяжении.

Геометрическую модель нити можно представить в форме полых прямых круговых цилиндров радиусом r , в которых волокна расположены по винтовым линиям с постоянным шагом h (рис. 2).

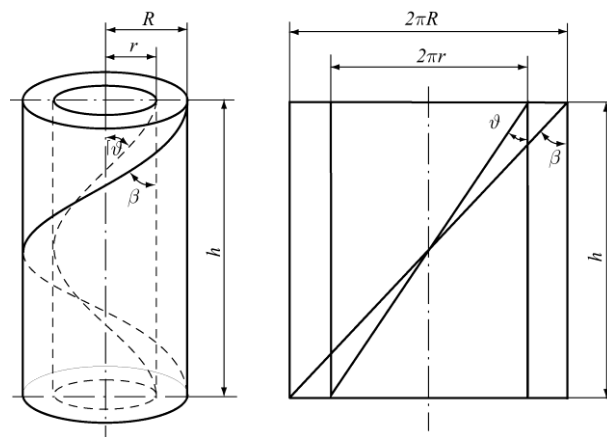


Рис. 2

Шаг винтовой линии не зависит от текущего радиуса нити и определяется круткой нити $K = \frac{1}{h}$. Угол подъема винтовой линии, то есть угол между касательной к винтовой линии и образующей цилиндра, равен ϑ . Из рис. 2 следует: $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2\pi r}{h}$, или $\operatorname{tg} \vartheta = 2\pi K$. Тогда получаем:

$$q = \frac{d\varphi}{dz} = 2\pi K. \quad (2)$$

Крутящий момент определяется по формуле:

$$M_k = B\theta = B \frac{d\varphi}{d\ell}. \quad (3)$$

Для нити механизм образования внутреннего крутящего момента M_k существенно отличается от крутящего момента сплошных тел.

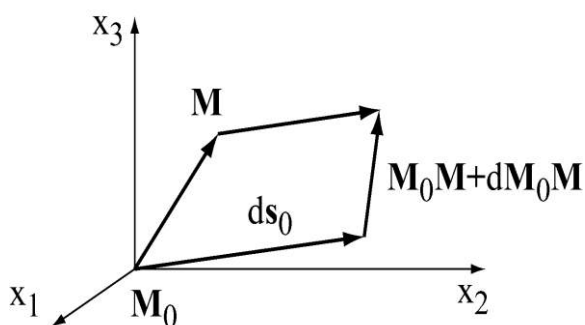


Рис. 3

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (ds_0 + dM_0M)^2 - ds_0^2 = 2ds_0 \times dM_0M + dM_0M^2 = 2dx_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_j.$$

Величина

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (4)$$

называется относительной деформацией, или просто деформацией элемента ds . Компонента тензора деформации ε_{11} равна относительному удлинению в направлении оси x_1 . Подобный смысл имеют компоненты ε_{22} и ε_{33} . Компоненты деформации с одноименными индексами представляют собой относительные деформации элементов, направленных по осям координат. Компоненты деформации с разными индексами представляют собой половины изменений первоначально прямых углов между соответствующими координатными осями. Величины $\varepsilon_{ij} (i \neq j)$ называются сдвигами.

Найдем деформации в окрестности одной точки M_0 . Для этого рассмотрим перемещения произвольного бесконечно малого отрезка ds вблизи точки M_0 , в которую поместим начало координат x_1, x_2, x_3 (рис. 3 – деформирование отрезка ds).

После деформирования точка M_0 займет новое положение M . Вектор $M_0M = u$ называется вектором перемещения с координатами u_1, u_2, u_3 , сокращенно u_j . Вектор ds_0 имеет координаты dx_1, dx_2, dx_3 сокращенно dx_i . Конец этого вектора получит перемещение $M_0M + dM_0M$, компоненты

$$\text{которого равны } u_j + du_j = u_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i.$$

Разность перемещений начала и конца вектора есть $dM_0M = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$. Поэтому можно

написать $ds = ds_0 + dM_0M$ с компонентами

$$dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i.$$

Сравним длины исследуемого вектора до и после деформирования. Для этого найдем:

Состояние чистого сдвига возникает при кручении стержня с круглым поперечным сечением. В сопротивлении материалов и теории упругости под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня с круглым поперечным сечением возникает только крутящий момент [2]. Прочие силовые факторы (изгибающие моменты, нормальные и поперечные силы) равны нулю. Механизм деформирования такого стержня можно представить себе в следующем виде: каждое поперечное сечение в результате действия внешних моментов поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как жесткое целое. Этот угол поворота для различных сечений будет различным.

Иначе обстоит дело с кручением нити, состоящей из волокон. Отличие вызывает

сама технология нити, когда нить, состоящая из системы параллельных волокон, преобразуется в крученую структуру, в которой наружные волокна длиннее центральных. При постоянном шаге витка h длина винтовой линии больше h , волокна должны удлиняться вследствие растяжения. Но все же геометрическая совместимость волокон в процессе кручения достигается в основном сменой положения частей волокон относительно оси нити таким образом, чтобы на большом протяжении нити длины траекторий волокон были бы одинаковыми. Этот эффект называют миграцией волокон. В этих условиях любое волокно находится в основном в состоянии растяжения, хотя в нем обязательно присутствуют и сдвиги. И если одну из упругих постоянных нити, а именно модуль упругости $E_n = E_f \cos^2 \beta$ можно получить аналитически из модуля упругости волокна E_f , то вторую упругую постоянную – модуль сдвига G_n – найти аналитически не представляется возможным.

Определение жесткости нити при кручении возможно несколькими методами, в частности, методом крутильных колебаний или методом крутильного динамометра. В данной работе использовался крутильный динамометр, описанный в литературе [3]. Идея метода основана на сравнении крутящего момента эталонного элемента с равновесным моментом исследуемой нити. На кафедре МТВМ МГТУ им. А.Н. Косыгина доцентом О.Ю. Дмитриевым и инженером А.А. Козловым воспроизведен прототип такого прибора. Испытываемая нить зажимается между двух зажимов. Верхний зажим – измерительный, прикреплен к нижнему концу чувствительного элемента. Нижний зажим приводится во вращение от привода в нужном направлении. Количество оборотов, сообщаемое пряже зажимом, подсчитывается счетчиком. Угол закручивания чувствительного элемента фиксируется с помощью шкалы.

В качестве чувствительного элемента использована стальная проволока, играющая роль торсионной пружины. Расчетное значение жесткости при кручении прово-

локи определяется по известной формуле сопротивления материалов:

$$B_{ch} = G_{ch} I_{p, ch}, \quad (5)$$

где G_{ch} – модуль сдвига материала проволоки (чувствительного элемента), равный для стали 8100 кгс/мм^2 ; $I_{p, ch}$ – полярный момент инерции сечения проволоки диаметром d , равный:

$$I_{p, ch} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (6)$$

Тогда получаем $B_{ch} = 4,97 \text{ сН} \cdot \text{мм}^2$.

Испытания пряжи проводятся следующим образом. Пряжа зажимается в верхнем и нижнем зажимах на расстоянии L_y . При этом вес нижнего зажима создает предварительное минимальное натяжение, распрямляющее пряжу. Затем шкала прибора и счетчик кручений устанавливаются в нулевое положение. Далее включается привод, вращающий нижний зажим в направлении, соответствующем дополнительному кручению пряжи. Количество оборотов n пряжи должно быть минимальным, обеспечивающим значимый угол закручивания φ_{ch} чувствительного элемента, который считывается по шкале после затухания крутильных колебаний. В условиях равенства крутящего момента чувствительного элемента $M_{ch} = B_{ch} \frac{\varphi_{ch}}{L_{ch}}$ и момента

пряжи $M_y = B_y \frac{2\pi n}{L_y}$ вычисляется жест-

кость пряжи при кручении, которая в нашем случае равна $B_y = 0,042 \text{ сН} \cdot \text{мм}^2$.

При экспериментальном определении жесткости при изгибе H воспользуемся теоретически обоснованным методом нелинейного изгиба нитей двумя сосредоточенными силами: консольная нить несет на свободном конце сосредоточенную нагрузку [1]. Методика и техническое обеспечение опытного определения жесткости нити при изгибе разработаны доцентом

кафедры механической технологии волокнистых материалов МГТУ им. А. Н. Косыгина И. Б. Цыгановым. Что же касается способов, в основе которых лежит линейная теория изгиба, включая работу изгиба, то вследствие малой жесткости результаты нельзя признать достоверными.

Определение жесткости нити заключается: 1) в подготовке образца нитей с пластиной на конце, 2) измерении прогиба нитей, 3) решении системы уравнений. При подготовке образца на мотовиле наматывается 50 витков испытываемой нити. На полученную полоску нитей неусаживающимся клеем (эпоксидный клей) наклеивается рамка из плотного материала. После высыхания клея полоска нитей обрезается так, чтобы концы нитей не выступали за контур рамки. Непосредственно перед испытанием боковые стороны рамки, не скрепленные с нитями, обрезаются. Затем от одной из полосок с наклеенными нитями отрезается полоска такой ширины, чтобы полученный образец, удерживаемый горизонтально за широкую полоску, имел прогиб свободного конца не менее 1/3 от длины консоли.

Подготовленный образец зажимается за широкую полоску в горизонтальном зажиме и фотографируется с помощью цифровой фотокамеры. Для устранения влияния собственного изгиба нитей производится повторное фотографирование образца после его переворота верхней стороной вниз. После этого от образца отрезается зажимная полоска и оставшаяся часть образца взвешивается на торсионных весах. Полученные фотографии обрабатываются на компьютере с помощью графического редактора. При измеренной длине, экспериментально определенном весе нитей вместе с сосредоточенным весом пластины и измеренной координате центра тяжести пластины вычисляется жесткость всех изгибаемых нитей H . Жесткость при изгибе той же чистошерстяной пряжи равна $H = 0,748 \text{ сН} \cdot \text{мм}^2$.

Вычислим теперь основные силовые факторы, определяющие равновесную структуру скрученной в два сложения чистошерстяной пряжи 31×2 текс. Внешние

силы, включая осевую силу (натяжение), и моменты отсутствуют, отношение жесткостей $e = \frac{H}{B} = 17,81$. Для вполне упругого

материала сплошного круглого сечения

$$H = \frac{\pi d^4}{64} E, \quad B = \frac{\pi d^4}{32} G, \quad \text{где } E - \text{ модуль упругости, } G - \text{ модуль сдвига. С учетом}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{здесь } \nu - \text{ коэффициент Пуассона})$$

окончательно получим

$$e = \frac{H}{B} = 1 + \nu. \quad \text{Даже при максимальном}$$

значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ отношение жесткостей не превышает 1,5, в то время как для обычной, можно сказать, типовой нити это отношение намного больше. С учетом сказанного еще раз становится ясно, почему для текстильных нитей при изучении кручения бессмысленно вводить, и тем более вычислять, модуль сдвига G .

В условиях отсутствия внешней нагрузки получим:

– приведенная к осевой линии нити контактная нагрузка

$$q_0 = B \frac{1}{4R^3(1+e)} = 0,446 \frac{\text{сН}}{\text{мм}},$$

– натяжение каждой из нитей в составе скрученной

$$T = B \frac{1}{4R^2(1+e)} = 0,048 \text{ сН},$$

– перерезывающая сила

$$Q = B \frac{\sqrt{1+2e}}{4R^2(1+e)} = 0,291 \text{ сН},$$

– изгибающий момент

$$M_{\text{и}} = H \frac{1}{2R(1+e)} = 0,184 \text{ сН} \cdot \text{мм},$$

– крутящий момент

$$M_{\text{к}} = B \frac{\sqrt{1+2e}}{2R(1+e)} = 0,063 \text{ сН} \cdot \text{мм}.$$

И еще одно важное замечание. Все жесткостные характеристики нитей и пряжи зависят от состава и структуры, в том числе и от крутки, как первичной, так и вторичной. При создании базы данных механических характеристик текстильных материалов, которой ни материаловеды, ни технологи не занимаются вследствие, по всей вероятности, недостаточной компетенции в этой области, необходимы многочисленные опыты. Чтобы избежать этого, следует привлечь хорошо разработанные методы регрессионного анализа. К примеру, следует вычислить жесткость нити при изгибе H различных линейных плотностей T . Связь между ними резко нелинейна. Тогда экспериментальные данные аппроксимируются конкретной функцией, и далее для нужной толщины нити получают величину жесткости. Конечно, это требует колоссальной затраты времени и некоторых знаний, но в условиях вузов с

тысячами студентов и аспирантов выполнение задачи создания подобной базы данных вполне реально. Тем более опыт организации базы данных в других областях, например, в авиационном машиностроении, имеется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В.П., Скуланова Н.С.* Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов: Монография. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008.
2. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986.
3. *Зарецкас Г.С.* Прибор SD-4 для определения характеристик текстильных нитей // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1965, № 2.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 26.11.12.