УДК [677.025.071.252.: 677.53]: 677.071.4

НЕЗАВИСИМОСТЬ ДЛИНЫ НИТИ В ПЕТЛЕ И В СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ТКАНИ ОТ ЖЕСТКОСТИ НИТИ ПРИ ИЗГИБЕ

INDEPENDENCE OF THE YARN LENGTH IN A LOOP AND IN STRUCTURAL ELEMENTS OF THE FABRIC OF THE YARN FLEXURAL RIGIDITY

В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.В. ЗАВАРУЕВ, О.А. ГОНЧАРОВА
V.P. SHCHERBAKOV, N.V. ZAVARUYEV, O.A. GONCHAROVA

(Московский государственный университет дизайна и технологии)
(Moscow State University of Design and Technology)
E-mail: office@msta.ac.ru

Приведены расчеты длины нити в петле и сил взаимодействия петель в трикотаже с учетом упругих свойств нити. Показано, что длина нити в петле при заданных величинах петельного шага и высоты петельного ряда не зависит от жесткости нити при изгибе. При этом параметры эллиптических интегралов остаются прежними, но сила контактного взаимодействия при увеличении жесткости растет. Выявлено, что длина упругой линии нити в ткани также не зависит от жесткости нити при изгибе. Вскрыт механизм явлений при изгибании упругой нити в петлю.

Calculations of length of a string in a loop and forces of interaction of loops in jersey are given in view of elastic properties of a string. It is shown, that the length of a string in a loop at the given sizes of a loopy step and height of loopy lines does not depend on rigidity of a string at a bend. Thus parameters of elliptic integrals remain former, but force of contact interaction at increase of rigidity grows. It is revealed, that the length of an elastic line of a string in a fabric also does not depend on rigidity of a string at a bend. The mechanism of the phenomena is opened at bending an elastic string in a loop.

Ключевые слова: нить, петля, ткань, упругость, жесткость, оптимум.

Keywords: a string, a loop, a fabric, elasticity, rigidity, an optimum.

Из работ в области трикотажного производства известно, что характеристики полотен определяются длиной нити в петле. На основе большого экспериментального материала различными авторами были получены эмпирические формулы, связывающие между собой длину нити в петле, линейную плотность нити, коэффициент плотности трикотажа. Применяются также соотношения, в которых присутствует линейный модуль петли. Здесь надо иметь в виду, что коэффициент плотности трикотажа и модуль петли имеют одинаковый смысл. Эмпирические методы проектирования трикотажа дают высокую точность, но любая из формул всегда требует нахождения параметров формулы из опыта. Каждый раз, когда идет расчет параметров трикотажа, необходим эксперимент по определению модуля петли (коэффициента плотности).

Теоретические методы являются универсальными и могут быть распространены на любые полотна, изготовленные на любой машине. Геометрические модели представляют собой описание формы петли отдельными отрезками прямых, дуг окружностей, участков эллипсов. Наиболее распространенным в нашей стране является геометрический метод, разработанный А.С. Далидовичем. Взаимосвязь между длиной нити в петле ℓ, петельным шагом А, высотой петельного ряда В и диаметром нити d дана им в виде

$$\ell=\frac{\pi}{2}A+2B+\pi d.$$

Для времени, когда разрабатывался этот метод (1933 – 1948 гг.), это, может быть, и было верным. Сейчас задачи, связанные с геометрически нелинейной теорией изгиба применительно к текстильным полотнам, могут быть решены на ЭВМ численно без особых затруднений.

Стремление деформированной при вязании упругой нити восстановить естественную форму приводит к возникновению усилий, действующих в области контакта смежных петель. Результирующей распределенных здесь сил является сила Р, которая так же? как и сила трения между нитями контактирующих петель есть результат взаимодействия двух соприкасающихся петель (рис. 1 – геометрия петли).

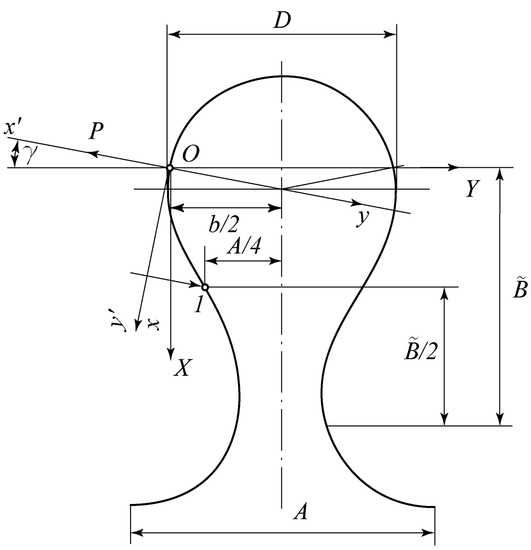

Рис. 1

Направление, определяемое углом γ, и величина силы Р неизвестны. В силу симметрии петли длина нити в ней [1]:

$$L=4\left[\ell+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\frac{D}{2}\right]. \qquad (1)$$

Здесь ℓ – длина упругой линии O1, D – диаметр окружности, являющейся формой игольной и платинной дуг. Величины ℓ, γ, D неизвестны и подлежат определению. Для вычисления пяти неизвестных P, ℓ, k, α_0, γ запишем пять уравнений [1]:

$$k\sin\alpha_0=0,707, \qquad (2)$$

$$F(k)-F(\alpha_0)=\omega, \qquad (3)$$

$$\frac{\dfrac{B}{2}+\dfrac{H\sin\gamma}{2k\sqrt{PH}\cos\alpha_0}}{\ell}=\frac{2}{\omega}k\cos\alpha_0\cos\gamma+ \qquad (4)$$
$$+\left[1-\frac{2}{\omega}\left(E(k)-E(\alpha_0)\right)\right]\sin\gamma,$$

$$\frac{d}{2\ell\cos\gamma}=\left[1-\frac{2}{\omega}\left(E(k)-E(\alpha_0)\right)\right]\cos\gamma- \qquad (5)$$
$$-\frac{2}{\omega}k\cos\alpha_0\sin\gamma,$$

$$A=2\left(\frac{H\cos\gamma}{k\sqrt{PH}\cos\alpha_0}-\frac{d}{\cos\gamma}\right). \qquad (6)$$

Здесь через F(α) обозначен эллиптический интеграл первого рода

$$F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},$$

через E(α) – эллиптический интеграл второго рода:

$$E(\alpha)=\int_0^{\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2}d\alpha.$$

Вычислив неизвестные, получим длину нити в петле, выражение для которой имеет вид:

$$L=4\left[\ell+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\frac{H}{2k\cos\alpha_0\sqrt{PH}}\right]. \qquad (7)$$

Подсчитаем длину нити в петле, образованной из вискозной нити линейной плотности 8,4 текс. Исходные данные для расчета: петельный шаг А=0,91 мм, высота петельного ряда В=0,74 мм, диаметр нити d=0,17 мм, жесткость нити при изгибе H=0,29 сН·мм^2 (жесткость H определена по теории и методике, разработанной нами). Решение системы (2)…(6) с учетом пространственной формы петли $\tilde{B}$=0,78 мм дает: сила контактного взаимодействия петель P=1,977 сН, длина упругой линии O1: ℓ=0,511 мм, модуль эллиптического интеграла k=0,912, амплитуда эллиптического интеграла α_0=0,888, угол γ=0,311. Вычисленная по формуле (7) длина нити в петле равна L=3,721 мм. Расчет при этих условиях по формуле А.С. Далидовича: $L=\frac{\pi}{2}A+2B+\pi d=$ 3, 443 мм. На первый взгляд, разность в приведенных величинах несущественна, всего 0,3 мм. Но если принять во внимание, к примеру, что в чулочном изделии содержится около 880 тысяч петель, то указанная разность достигает 264 м, и в этом смысле приведенный пример не является исключением.

В рассмотренной задаче встречается очень интересная особенность: длина нити в петле при заданных величинах петельного шага A и высоты петельного ряда B не зависит от жесткости нити при изгибе. Вычислим длину нити в петле, связанной из нитей различной природы при тех же значениях A и B. Длина нити в петле по-прежнему равна L=3,721 мм. Обоснование этого явления приведем позже, а сейчас дадим элементы расчета: 1) проволока стальная 50 микрометров H=6,213, P=42,353; 2) пряжа чистошерстяная 31 текс H=0,784, P=5,344; 3) три вольфрамовых проволоки H=0,171, P=1,166. При этом параметры эллиптических интегралов, угол γ остаются прежними, но сила контактного взаимодействия P при увеличении жесткости Нрастет. Вскрыть механизм явлений при изгибании упругой нити в петлю поможет работа G.A.V. Leaf, 1957 г. [2].

В статье G.A.V. Leaf [2] рассматривается форма, которую принимает упругий гибкий стержень, изгибающийся силами и моментами на концах (рис. 2). Прямолинейный стержень изгибается двумя равными, противоположно направленными силами P и моментами C, пока касательные к упругой линии в точках A и A' не станут параллельными и в то же время перпендикулярными линии действия P.

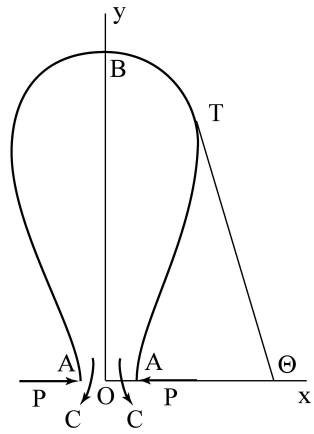

Рис. 2

Запишем уравнение равновесия:

$$H\frac{d\vartheta}{ds}=Py-C, \quad (8)$$

где ϑ – угол наклона касательной в текущей точке упругой линии. Обозначим $\beta^2=\frac{H}{P}$. Приведение дифференциального уравнения к эллиптическим интегралам опустим и сразу напишем выражения для декартовых координат:

$$\begin{aligned} x&=\beta\left[2E(\varphi)-F(\varphi)\right], \\ y&=2\beta k\left(\cos\varphi-\cos\varphi_0\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь несложно найти стационарные значения параметров, определяющих максимальную ширину упругой линии, то есть x_{max}. Условием максимума является $\frac{dx}{d\varphi}=0$:

$$2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_{max}}-\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_{max}}}=0.$$

Максимальное значение амплитуды эллиптического интеграла дано выражениями:

$$\sin\varphi_{max}=\frac{1}{k\sqrt{2}},\ \ \cos\varphi_{max}=\frac{\chi}{2\beta k}.$$

Наибольшая ширина упругой линии x_{max} принимает значение:

$$x_{max}=2\beta\left[2E\left(\varphi_{max}\right)\text{-}F\left(\varphi_{max}\right)\right]. \qquad (10)$$

Максимальную высоту y_{max}=OB определим из (9) при $\varphi=0$:

$$y_{max}=2\beta k\left(1\text{-}\cos\varphi_0\right). \qquad (11)$$

Напишем отношение максимальной высоты к максимальной ширине:

$$\frac{y_{max}}{x_{max}}=\frac{k\left(1-\cos\varphi_0\right)}{2E\left(\varphi_{max}\right)-F\left(\varphi_{max}\right)}. \qquad (12)$$

Рассматривая соотношение (12), видим что отношение $\frac{y_{max}}{x_{max}}$ не зависит от жесткости нити, а определяется модулем k и амплитудой φ эллиптических интегралов.

При проектировании ткани основу анализа должны составлять определение и количественное описание геометрической элементарной ячейки ткани. На первом этапе проектирования рассмотрим ткань в свободном состоянии, то есть внешняя нагрузка отсутствует. При этом следует иметь в виду, что реальная ткань существует как цельное физическое плоское тело вследствие взаимодействия между собой нитей основы и утка. Стремление изогнутой в ткачестве упругой нити восстановить естественную прямолинейную форму приводит к возникновению усилий, действующих в области контакта перекрещивающихся нитей. Результирующей распределенных здесь сил является сила, которая является следствием взаимодействия двух соприкасающихся нитей. Параметры, определяющие напряженно-деформированное состояние ненагруженной ткани, существенно зависят от жесткости при изгибе нитей основы и утка. Из-за большой кривизны обеих систем нитей методы сопротивления материалов непригодны, и описание состояния ткани будем проводить методами геометрически нелинейной теории упругой нити, где осевая линия нити принимается нерастяжимой. Расчетная схема изгиба нити в элементе ткани приведена на рис. 3.

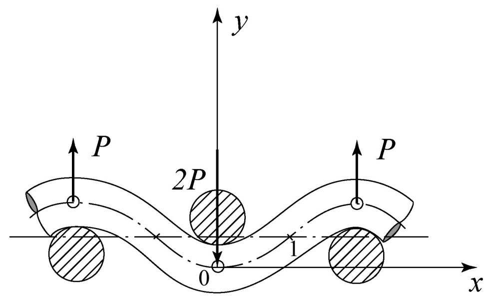

Рис. 3

Длина упругой линии неизвестна, но задано расстояние между нитями основы и утка. В данном случае анализ модели проводится на примере технической ткани, выработанной из высокомодульной нити «русар» линейной плотности 29 текс. Жесткость при изгибе нити равна H=9,82 сН·мм^2. Наша задача сводится к рассмотрению изгиба консольной упругой нити на участке 01 (рис. 3). При плотности ткани по основе P_0=260 нитей/дм и такой же плотности по утку координаты x_1=0,192 мм и y_1=0,08 мм. Вторая координата по величине отличается от диаметра исходной нити, равного 0,21 мм. В деформированном состоянии изменяются диаметры нитей из-за возникающих в них натяжений. Уменьшение δ диаметра нити при деформировании ткани – функция сжимающей силы F_s [3]. Кривая $\delta = \delta\ (F_s)$ приведена на рис. 4.

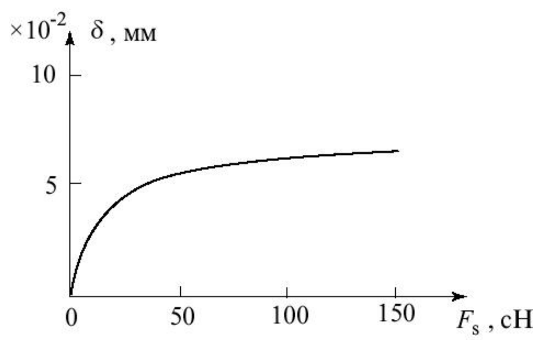

Рис. 4

Видно, что начиная с F_s=50 сН высота сечения нити почти не изменяется. При F_s=50 сН диаметр уменьшается на 0,05 мм, и принимает значение $y_1 = (0,21 - 0,05)/2 = 0,08$ мм. Величина F_s пока неизвестна, но, как показывают расчеты, значение сжимающей силы даже в свободном состоянии ткани, то есть при отсутствии внешней нагрузки, превышает 50 сН.

Длина осевой линии нити ℓ_0 неизвестна и подлежит определению, так же как и угол φ между осью нити и нейтральной линией структуры в точке 1. Уравнения для вычисления четырех неизвестных P, ℓ_0, k, α_0:

$$F(k)\text{-}F(\alpha_0)=\omega,\ \ k\sin\alpha_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad (13)$$

$$\frac{y_1}{\ell_0}=1\text{-}\frac{2}{\omega}\left[F(k)\text{-}F(\alpha_0)\right],\ \ \frac{x_1}{\ell_0}=\frac{2}{\omega}k\cos\alpha_0.$$

Длина осевой линии участка $01=\ell_0$ равна 0,211 мм. Тогда можно вычислить уработку основной нити:

$$a_o=\frac{\ell_0\text{-}x_1}{\ell_0}\cdot 100=\frac{0,211-0,192}{0,211}\cdot 100=9,0\,\%.$$

Следует обратить внимание, что уработка, в отличие от всех методов в области проектирования ткани, включая работы выдающегося специалиста S. Kawabata [3], не задается как один из параметров проектирования, а определяется аналитически.

Угол φ наклона касательной в концевой точке 1:

$$\varphi=2\arcsin k\text{-}\frac{\pi}{2}=0,585\,\text{рад}=33,5^{\circ}.$$

Особое внимание нужно обратить на величину силы взаимодействия нитей в области контакта: $2P=2\cdot 294,68$ м, $H=2\cdot 29,468$ сН ≈ 58,9 гс. Такое большое усилие давления нитей друг на друга, равное 58,9 сН, создает устойчивую структуру ткани, ее способность сопротивляться внешним воздействиям. Оно обусловлено в первую очередь, большой жесткостью нити при изгибе: $H=9,82$ $сН\cdot мм^2$. Для сравнения приведем значение H хлопчатобумажной пряжи той же линейной плотности – 0,23 $сН\cdot мм^2$ (в 43 раза меньше). Решение системы (13) дает P=0,69 сН. Но что гораздо важнее, так это то, что длина упругой линии не зависит от жесткости нити при изгибе. При тех же координатах точек 0 и 1 длина осевой линии участка $01=\ell_0$ равна по-прежнему 0,211 мм. Объяснение этого важного явления приведено выше.

В Ы В О Д Ы

1. Длина нити в петле при заданных величинах петельного шага А и высоты петельного ряда В не зависит от жесткости нити при изгибе.
2. Длина упругой линии основы и утка в элементе ткани не зависит от упругих свойств нити.
3. Упругость нити определяет величину контактного взаимодействия петель в трикотаже, основы и утка в ткани.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Щербаков В.П., Скуланова Н.С.* Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов: Монография. – М. 2008.
2. *G.A.V. Leaf.* A property of a buckled elastic rod // British journal of applied physics. – Vol. 9, February 1958.
3. *Kawabata S., Niwa M., Kawai H.* // J. Text. Inst. – 64, (7.3.1973) 21.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 01.11.13.