УДК 677.21+539.3:11

МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КИПЫ ХЛОПКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ КИПЫ*

THE MECHANICAL MODEL OF A COTTON BALE AND THE MATHEMATICAL MODEL OF THE BALE DEFORMATIONAL MOVEMENT

В.В. ВОЛКОВ
V.V. VOLKOV

(Пензенский государственный технологический университет)
(Penza State Technological University)
E-mail: rector@penzgtu.ru

Предлагается механическая модель кипы хлопка и ее математическая модель деформационного движения. Приведено общее и частное решение уравнений движения кипы. Обосновано применение приближенного решения уравнения движения кипы.

The mechanical model of a cotton bale and its mathematical model of deformational movement are presented in this article. The author gives the general and the particular solutions of the bale movement equations.

Ключевые слова: хлопок, кипа, механическая модель, математическая модель, деформация, уравнения движения кипы.

Keywords: cotton, a bale, a mathematical model, a mechanical model, deformation, equations of the bale movement.

Кипу хлопка можно представить в виде механической модели с распределенными инерционными (m_0), упругими (c_0) и диссипативными (b_0) параметрами[2]. В этой модели (рис. 1) независимой переменной является лагранжева координата z, с помощью которой определяются положения сечений кипы по высоте в недеформированном состоянии, зависимой переменной является деформационное перемещение u(t, z). Площадь поперечного сечения кипы A = 0,97·0,6 = 0,582 м^2 считается неизменной в процессе деформаций, высота кипы в ненапряженном состоянии ℓ = 1,3 м, масса кипы m =205 кг, усилие прессования Q = 42,4·10^4 Н. Полная деформация спрессованной кипы δ = 0,53 м. Жесткость кипы $c = \frac{Q}{\delta} = 80 \cdot 10^4$ Н/м. Погонные масса и жесткость кипы $m_0 = \frac{m}{\ell} = 157,7$ кг/м, $c_0 = c\frac{\ell}{1(\text{м})} = 104 \cdot 10^4$ Н.

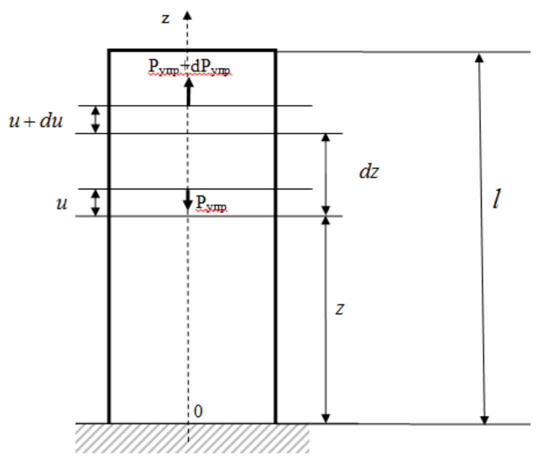


Рис. 1

* Работа выполнена под руководством проф., докт. техн. наук В.К. Полякова (СПГУТД).

Выделим сечениями z и z+dz произвольный недеформированный элемент кипы dz.

В результате деформации сечение z займет положение $z+u(t,z)$, а сечение z+dz – положение $z+dz+u(t,z)+\frac{\partial u(t,z)}{\partial z}dz$.

Длина элемента dz в деформированном состоянии будет равна $dz+\frac{\partial u(t,z)}{\partial z}dz$, а деформация этого элемента будет равна $\frac{\partial u(t,z)}{\partial z}dz$.

Относительная деформация (отношение величины деформации к первоначальной длине выделенного элемента) будет:

$$\varepsilon=\frac{\partial u(t,z)}{\partial z}. \quad (1)$$

Воспользуемся известным равенством:

$$\varepsilon=\frac{\sigma(t,z)}{E}=\frac{P_{упр}}{AE}. \quad (2)$$

Здесь $\sigma(t,z)$ – напряжение; E – модуль упругости; $P_{упр}$ – упругое усилие; A – площадь сечения кипы.

Так как

$$c=\frac{AE}{\ell},\quad c_0=AE,\quad c=\frac{c_0}{\ell},$$

то , учитывая равенства (1) и (2), найдем:

$$P_{упр}(t,z)=c_0\varepsilon=c_0\,\frac{\partial u(t,z)}{\partial z}. \quad (3)$$

Равенство (3) задает характер распределения упругих усилий по длине кипы в различные моменты времени.

В предыдущих равенствах: c – коэффициент жесткости кипы; ℓ – высота кипы; c_0 – погонная жесткость (жесткость 1 м длины) кипы.

Применив к выделенному элементу второй закон Ньютона, получим:

$$m_0dz\frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial t^2}=-m_0dzg+dP_{упр}, \quad (4)$$

$$dP_{упр}=c_0\,\frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial z^2}dz. \quad (5)$$

Подставив равенство (5) в уравнение движения (4), получим:

$$m_0\frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial t^2}-c_0\frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial z^2}=-m_0g, \quad (6)$$

в этом уравнении учтена сила тяжести материала кипы.

В уравнении (6) дополнительно учтем демпфирующие свойства материала кипы, считая силы демпфирования пропорциональными скорости деформации:

$$P_{демп}=b_0\frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial t\partial z},$$
$$dP_{демп}=b_0\frac{\partial^3 u(t,z)}{\partial t\partial z^2}dz. \quad (7)$$

После учета равенств (7) получим уравнение движения в окончательном виде:

$$m_0\frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial t^2}-b_0\frac{\partial^3 u(t,z)}{\partial t\partial z^2}-c_0\frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial z^2}=-m_0g. \quad (8)$$

При решении уравнений движения кипы руководствуемся следующими рассуждениями. Уравнение (8) является линейным неоднородным уравнением в частных производных. Его решение состоит из суммы решений однородного и неоднородного уравнений. Найдем сначала решение однородного уравнения (10):

$$m_0\frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial t^2}-b_0\frac{\partial^3 u(t,z)}{\partial t\partial z^2}-c_0\frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial z^2}=0. \quad (9)$$

Одним из методов поиска решения является метод Фурье, заключающийся в представлении решения в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени t, другая – от координаты z:

$$u(t,z)=T(t)Z(z). \qquad (10)$$

Подставив это решение в уравнение (9), получим

$$m_0\ddot{T}(t)Z(z)-b_0\dot{T}(t)Z''(z)-c_0T(t)Z''(z)=0. \qquad (11)$$

$$m_0\ddot{T}(t)Z(z)-Z''(z)[b_0\dot{T}(t)+c_0T(t)]=0.$$

Разделим почленно это равенство на $Z(z)[b_0\dot{T}(t)+c_0T(t)]$:

$$m_0\frac{\ddot{T}(t)}{[b_0\dot{T}(t)+c_0T(t)]}=\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-p^2. \qquad (12)$$

Равенство (12) записано на основании того, что две функции различных аргументов могут быть тождественно равны только в том случае, если обе они равны одной и той же постоянной величине.

Равенству (12) соответствуют два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$Z''(z)+p^2Z(z)=0. \qquad (13)$$

$$m_0\ddot{T}(t)+b_0p^2\dot{T}(t)+c_0p^2T(t)=0. \qquad (14)$$

Решение уравнения (13) имеет вид:

$$Z(z)=C_1\cos pz+C_2\sin pz. \qquad (15)$$

Это решение для модели, изображенной на рис. 1, с учетом конкретных граничных условий рассматриваемой задачи преобразуется к виду:

$$Z(0)=0,\quad C_1=0,$$

$$Z(z)=C_2\sin pz,$$

$$Z'(\ell)=0,\quad Z'(z)=C_2p\cos pz,$$

$$\cos p\ell=0,$$

$$p_1=\frac{\pi}{2\ell},\ p_2=\frac{3\pi}{2\ell},\ p_3=\frac{5\pi}{2\ell},\ldots\ldots,\ p_n=\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}.$$

Таким образом, получим бесчисленное множество решений, зависящих от значений p_n.

Уравнение (14) предварительно преобразуем к виду:

$$\ddot{T}(t)+2r_n\dot{T}(t)+k_{0n}^2T(t)=0, \qquad (16)$$

где $r_n=\dfrac{b_0p_n^2}{2m_0},\quad k_{0n}=p_n\sqrt{\dfrac{c_0}{m_0}}.$

Решение уравнения (16) получим в виде:

$$T(t)=e^{-r_nt}(D_1\cos k_nt+D_2\sin k_nt), \qquad (17)$$

где $k_n=\sqrt{k_{0n}^2-r_n^2}=p_n\sqrt{\dfrac{c_0}{m_0}-\dfrac{b_0^2p_n^2}{4m_0^2}}.$

В конечном счете для рассматриваемой модели решение однородного уравнения (9) получится в виде бесконечного ряда:

$$u(t,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin p_nze^{-r_nt}(D_{1n}\cos k_nt+D_{2n}\sin k_nt). \qquad (18)$$

К этому общему решению необходимо добавить частное решение неоднородного уравнения (8).

Определяем деформацию кипы под действием сил тяжести. Для этого из неоднородного уравнения (8) в статических условиях найдем:

$$c_0\frac{\partial^2u(z)}{\partial z^2}=m_0g, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z}=\frac{m_0}{c_0}gz-\frac{m_0}{c_0}g\ell, \qquad (20)$$

$$u(z)=\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{m_0}{c_0}g\ell z. \qquad (21)$$

Добавив это решение к решению (18), получим общее решение неоднородного уравнения (8):

$$u(t,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin p_nze^{-r_nt}(D_{1n}\cos k_nt+D_{2n}\sin k_nt)+\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{m_0}{c_0}g\ell z. \qquad (22)$$

Деформацию кипы под действием усилия прессования определяем следующим образом. Из уравнения (9) в статических условиях найдем:

$$\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2}=0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z}=-\frac{Q}{c_0}, \tag{24}$$

$$u(z)=-\frac{Q}{c_0}z\cdot \tag{25}$$

Таким образом, начальные условия рассматриваемой задачи запишутся в следующем виде:

$$u(0,z)=-\frac{Q}{c_0}z+\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{m_0}{c_0}g\ell z=\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\left(\frac{Q}{c_0}+\frac{m_0}{c_0}g\ell\right)z,\quad \dot{u}(0,z)=0. \tag{26}$$

Находим частное решение уравнения движения кипы с учетом начальных условий (26). Для этого в уравнении (22) воспользуемся условием ортогональности форм собственных колебаний:

$$\int_0^\ell u(t,z)\sin p_n z\,dz=\frac{\ell}{2}e^{-r_n t}(D_{1n}\cos k_n t+D_{2n}\sin k_n t)+\int_0^\ell\left(\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{m_0}{c_0}g\ell z\right)\sin p_n z\,dz. \tag{27}$$

При t = 0 получим:

$$\int_0^\ell\left(\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{m_0}{c_0}g\ell z\right)\sin p_n z\,dz-\int_0^\ell\frac{Q}{c_0}z\sin p_n z\,dz=\frac{\ell}{2}D_{1n}+\int_0^\ell\left(\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{m_0}{c_0}g\ell z\right)()\sin p_n z\,dz, \tag{28}$$

$$D_{1n}=-\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\frac{Q}{c_0}z\sin p_n z\,dz=-\frac{2Q}{\ell c_0 p_n^2}(\sin p_n\ell-p_n\ell\cos p_n\ell). \tag{29}$$

Найдем закон изменения скоростей:

$$\dot{u}(t,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin p_n z[-r_n e^{-r_n t}(D_{1n}\cos k_n t+D_{2n}\sin k_n t)+k_n e^{-r_n t}(-D_{1n}\sin k_n t+D_{2n}\cos k_n t)].$$

Для начальных скоростей имеем:

$$\int_0^1\frac{\partial u(t,z)}{\partial t}\sin p_n z\,dz=-\frac{\ell}{2}r_n e^{-r_n t}(D_{1n}\cos k_n t+D_{2n}\sin k_n t)+\frac{\ell}{2}e^{-r_n t}k_n(-D_{1n}\sin k_n t+D_{2n}\cos k_n t),$$

и при t = 0 получим:

$$\begin{gathered}0=-\frac{\ell}{2}r_n D_{1n}+\frac{\ell}{2}k_n D_{2n},\\ D_{2n}=\frac{r_n}{k_n}D_{1n}=-\frac{r_n}{k_n}\frac{2Q}{\ell c_0 p_n^2}(\sin p_n\ell-p_n\ell\cos p_n\ell).\end{gathered} \tag{30}$$

С учетом найденных значений $D_{1,n}$, $D_{2,n}$ окончательно получим:

$$u(t,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin p_n z e^{-r_n t}(D_{1n}\cos k_n t+D_{2n}\sin k_n t)+\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{m_0}{c_0}g\ell z. \qquad (31)$$

Часто приходится выполнять нахождение приближенного решения уравнения движения кипы. Равенство (31) дает точное решение уравнения движения кипы, однако из практических соображений известно, что в реальных условиях движение кипы затухает примерно через четверть периода колебаний на основной частоте, что позволяет ограничиться одним членом разложения (31), а вместо теоретической формы колебаний использовать уравнение начальной деформации:

$$u(0,z)=\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{1}{c_0}z(Q+m_0g\ell),$$

$$u(t,z)=\left[\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{1}{c_0}z(Q+m_0g\ell)\right]e^{-rt}(D_1\cos kt+D_2\sin kt),$$

$$D_1=1,$$

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial t}=\left[\frac{1}{2}\frac{m_0}{c_0}gz^2-\frac{1}{c_0}z(Q+m_0g\ell)\right]-re^{-rt}(D_1\ \cos\ kt+D_2\sin kt)+$$

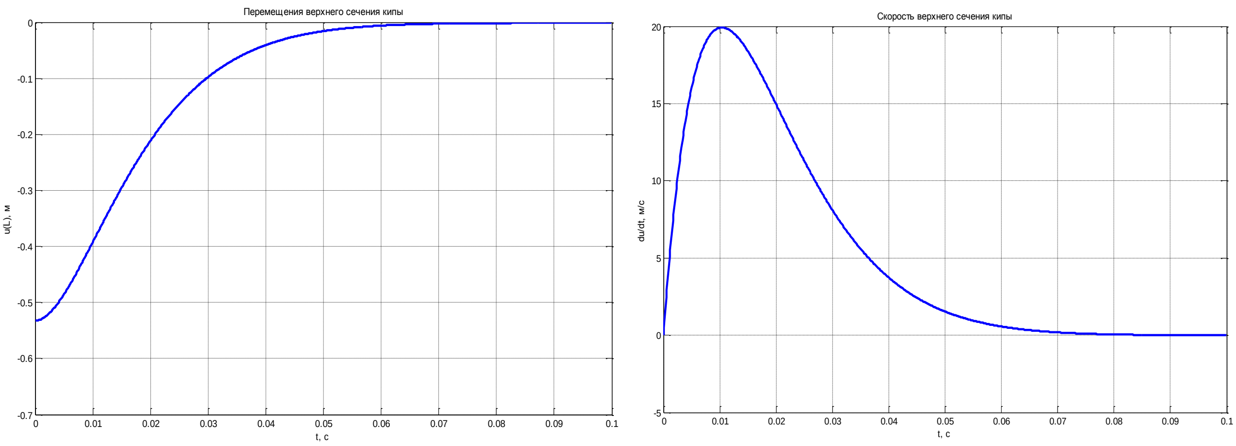
$$+e^{-rt}k(D_1\sin kt+D_2\cos kt)],$$

$$[-r+kD_2]=0,\ D_2=\frac{r}{k},$$

где $r=\dfrac{b_0p^2}{2m_0}$, $k=p\sqrt{\dfrac{c_0}{m_0}}$, $r=r_1$, $p=p_1$,

$$k=\sqrt{k_0^2-r^2}=p\sqrt{\frac{c_0}{m_0}-\frac{b_0^2p^2}{4m_0^2}}.$$

По приближенной зависимости была разработана программа, с помощью которой построены графики перемещений (рис. 2-а) и скорости верхнего сечения кипы (рис 2-б) после снятия упаковки.



а) б)

Рис. 2

ВЫВОДЫ

1. Предложена механическая модель кипы хлопка.
2. Составлена математическая модель деформационного движения кипы.
3. Приведено общее и частное решение уравнений движения кипы.
4. Обосновано применение приближенного решения уравнения движения кипы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волков В.В., Семенов А.Д. и др.* Влияние физико-механических свойств ставки кип на внешнюю неровноту ее переработки // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2009, №1. С.48…51.
2. *Севостьянов А.Г.* Методы и средства исследования механико-технологических процессов текстильной промышленности. – 2-е изд., допол. и перераб. – М., 2007.
3. *Труевцев Н.И. и др.* Механическая технология волокнистых материалов. – М.: Легкая индустрия, 1999.

Рекомендована кафедрой технологии машиностроения. Поступила 13.01.14.