УДК 677-486.2:539.11

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ ЖЕСТКОСТИ ТРИКОТАЖА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ОТ ЕГО ПЛОТНОСТИ, ЖЕСТКОСТИ НИТЕЙ И ДЛИНЫ НИТИ В ПЕТЛЕ

USE OF NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY FOR DEFINITION OF DEPENDENCE OF RIGIDITY OF JERSEY AT EXTENSION FROM ITS DENSITY, RIGIDITY OF FILAMENTS AND LENGTH OF THE FILAMENT THE LOOP

Л.А. КУДРЯВИН, О.Ф. БЕЛЯЕВ, В.А. ЗАВАРУЕВ
L.A. KUDRJAVIN, O.F. BELJAEV, V.A. ZAVARUEV

(Московский государственный университет дизайна и технологии)
(Moscow State University of Design and Technology)
E-mail: vlzavaruev@yandex.ru

Описано использование нелинейной теории упругости для расчета деформации металлического кулирного трикотажа переплетения гладь при изотропном двухосном нагружении. Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Use of nonlinear theory of elasticity for calculation of deformation metallic jersey is presented at isotropic biaxial a loading. Results of calculation will well agree with experimental data.

Ключевые слова: металлический трикотаж, двухосное нагружение, нелинейная теория упругости.

Keywords: metal jersey, biaxial a loading, nonlinear theory of elasticity.

В работе теоретически показано, что если размер ячеек в образце трикотажа, не меняя формы ячеек, уменьшать в $n_я$ раз по вертикали и по горизонтали и увеличивать в $n_ж$ раз жесткость нити на изгиб, то жесткость трикотажа при двухосном растяжении возрастает в обоих направлениях в $n_я^3 \cdot n_ж$ раз. Поскольку длина нити в петле обратно пропорциональна $n_я$, то жесткость трикотажа растет обратно пропорционально кубу длины нити в петле.

Анализ микрофотографий нерастянутого трикотажа подтверждает [1], что практически любой вид трикотажа можно представить в виде совокупности одного или нескольких одинаковых так называемых повторяющихся элементов. Их относительная деформация при растяжении образца соответствует относительной деформации всего образца. Повторяющиеся элементы можно аппроксимировать сочетанием частей окружностей различного радиуса и отрезков прямых линий. Такая модель наиболее универсальна, так как описывает любую форму рассматриваемого элемента.

Предположим, что точки приложения сил к повторяющемуся элементу при растяжении образца практически не перемещаются вдоль элемента. Как показали наши предыдущие исследования [1…5], это справедливо, когда образец растягивается в двух взаимно - перпендикулярных направлениях (по вертикали и по горизонтали) одинаковыми удельными силами (силами, приходящимися на единицу размера образца). Для краткости будем называть в дальнейшем такие нагрузки симметричными. Если удельные силы различаются по вертикали и по горизонтали, такие нагрузки будем называть несимметричными. Далее будем полагать, что на нить действуют только сосредоточенные силы и не действуют распределенные.

Рассмотрим один из повторяющихся элементов в нерастянутом образце. Разделим его на несколько участков так, чтобы рассматриваемый участок имел во всех точках одну и ту же кривизну и чтобы сосредоточенные силы f_0 и f_1 и внешние изгибающие моменты M_0, M_1 были приложены только по концам 0 и 1 (рис. 1 – схематическое изображение одного из участков повторяющегося элемента) рассматриваемого участка (они взяты с учетом действия отрезанных частей нити на участок 0-1). Поскольку на участке 0-1 отсутствуют распределенные силы, то из условия равновесия участка имеем $f_0+f_1=0$ или $f_0 = - f_1$.

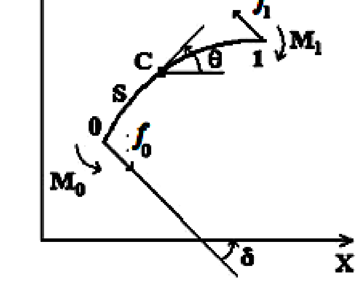

Рис. 1

Введем угол δ, отсчитываемый против часовой стрелки от направления силы f_0 к оси X (или по часовой стрелке от оси X к направлению силы f_0). Начальную кривизну нити будем считать переменной по длине s повторяющегося элемента, но постоянной в пределах одного участка (s – это расстояние по нити от начальной точки повторяющегося элемента до рассматриваемой точки C).

Для каждого участка повторяющегося элемента можно записать [1]:

$$d^2\theta/ds^2 = -(f/H)\sin(\theta+\delta). \qquad (1)$$

Здесь θ – угол наклона касательной в произвольной точке C нити к оси 0X в деформированном состоянии участка; f – величина силы, действующей на концы этого участка; H – жесткость нити при изгибе.

Для упрощения дальнейшего рассмотрения перейдем от s к безразмерной переменной τ. Выберем ее так, чтобы на каждом участке она менялась в пределах от 0 до 1. В связи с этим для первого участка примем $\tau=s/L_1$ (в этом случае в начале участка s=0 и τ=0, в конце участка $s=L_1$, а τ=1), для второго $\tau=(s-L_1)/L_2$ (в начале участка $s = L_1$, τ=0, в конце участка $s=L_1+L_2$, τ=1), для третьего $\tau=(s - L_1 – L_2)/L_3$ (в начале участка $s = L_1 + L_2$, τ=0, в конце участка $s=L_1+L_2+L_3$, τ=1) и т.д. Здесь s – текущее значение величины s для каждого участка, L_1, L_2, L_3,...... – длина каждого участка.

После небольших преобразований уравнение (1) для произвольного i - го участка повторяющегося элемента будет иметь вид:

$$d^2\theta_i/d\tau^2 = - A_i \sin(\theta_i+\delta_i), \qquad (2)$$

где $A_i = f_i L_i^2/H$, i – номер участка; f_i – сила, действующая на этот участок; L_i – его длина.

Пусть мы имеем два образца, состоящих из одинаковых по форме, но разных по размеру повторяющихся элементов, причем эти элементы изготовлены из нитей с разной жесткостью. Подействуем на каждый из образцов разными симметричными нагрузками. Можно показать, что два любых аналогичных участка в них будут иметь одно и то же относительное удлинение, если для них выполняется условие:

$$A_{1i} = A_{2i} \text{ или } f_{1i} \cdot L_{1i}^2/H_1 i = f_{2i} \cdot L_{2i}^2/H_2 i. \quad (3)$$

Одинаковое и такое же относительное удлинение будут иметь повторяющиеся элементы в этих образцах и сами эти образцы.

В уравнении (3) подстрочные индексы 1 и 2 означают номера образцов, а i – номер аналогичных участков в этих образцах.

Используем формулу (3) для оценки влияния плотности трикотажа и жесткости нити при изгибе на жесткость трикотажа при его растяжении. Для этого представим, что мы имеем два абсолютно одинаковых образца с одинаковыми по форме и по размерам ячейками, изготовленными из нити с одинаковой жесткостью. В этих образцах будут одинаковые по размеру и форме повторяющиеся элементы, разбитые на одно и то же количество участков, причем участки с одинаковым номером будут абсолютно одинаковы. Подействуем на каждый из этих образцов одинаковыми удельными силами по горизонтали и вертикали. Очевидно, аналогичные участки в повторяющихся элементах будут после деформации иметь одинаковые размеры, на них будут действовать одинаковые по величине и по направлению силы, и они будут иметь одинаковые относительные удлинения, такие же относительные удлинения будут иметь и образцы.

Будем вносить изменения во второй образец. Вначале уменьшим в $n_я$ раз размер петель по вертикали и по горизонтали, оставляя их форму прежней (увеличиваем в $n_я$ раз плотность образца по вертикали и по горизонтали). При этом длина i-го участка L_{2i} уменьшится в $n_я$ раз, а L_{2i}^2 в $n_я^2$ раз и для получения одинаковых относительных удлинений образов (для сохранения равенства $A_{2i} = A_{1i}$) сила f_{2i} по сравнению с силой f_{1i} должна увеличиться в $n_я^2$ раз. Во столько же раз должна увеличиться сила, действующая на один повторяющийся элемент и на одну ячейку второго образца. За счет уменьшения размера ячеек второго образца в $n_я$ раз по вертикали и по горизонтали число ячеек, приходящихся на единицу размера второго образца вдоль вертикали и вдоль горизонтали, увеличится в $n_я$ раз, что приведет к дополнительному увеличению удельной силы, действующей на каждую сторону второго образца еще в $n_я$ и в общем удельная сила увеличиться в $n_я^3$ раз.

Будем теперь во втором образце увеличивать жесткость нити в $n_ж$ раз при неизменных форме и размере петель. Для обеспечения прежней относительной деформации второго образца величина A_{2i} должна остаться прежней. Это произойдет при условии, что f_{2i} увеличится в $n_ж$ раз.

Таким образом, чтобы второй образец, изготовленный из в $n_ж$ раз более жесткой на изгиб нити, имеющий те же по форме петли, что и первый образец, но меньшие по размеру в $n_я$ раз, имел бы то же самое относительное удлинение, что и первый образец, удельная сила F_2, действующая на каждую его сторону, и удельная сила F_1, действующая на каждую сторону первого образца, должны быть связаны соотношением:

$$F_2 = F_1 \, n_я^3 \, n_ж. \quad (4)$$

Эту формулу можно применять также и в случае несимметричной нагрузки, если при этом формы повторяющихся элементов в образцах одинаковы, точки приложения сил при деформации не перемещаются по нити, и отношение удельных сил, действующих на два образца по горизонтали, равно отношению удельных сил, действующих на эти образцы по вертикали. Только в этом случае под F_2 и F_1 в формуле (4) будем понимать либо только силы, действующие по вертикали, либо только силы, действующие по горизонтали. Однако, даже если точка приложения сил по нити немного перемещается, эту формулу можно использовать для ориентировочных оценок.

Поскольку относительная деформация обоих образцов при выполнении равенства (4) одинакова, отношение $F_2/F_1 = n_я^3 \cdot n_ж$ показывает, во сколько раз жесткость второго образца отличается от жесткости первого.

Перейдем теперь к практическому применению формулы (4).

Пусть мы имеем квадратные образцы трех видов трикотажа (кулирного, одногребеночного трико открытое и одногребеночного трико закрытое) с одинаковыми размерами 12×12 см, на которые по горизонтали и по вертикали действуют одинаковые силы 150 сН, а следовательно, и одинаковые удельные силы F_1.

Как показывают эксперимент и теоретические расчеты [3…5], относительная деформация образца кулирного трикотажа, изготовленного из стальной микропроволоки ∅50 мкм в два сложения, при такой нагрузке составляет по вертикали $\varepsilon_в$=0,15%, а по горизонтали $\varepsilon_г$= 10,5%. Для такого же по размеру квадратного образца одногребеночного трико открытое, изготовленного из стальной микропроволоки ∅50 мкм в одно сложение, при воздействии на него такой же удельной силы F_1 относительная деформация его по вертикали $\varepsilon_в$=2,29%, а по горизонтали $\varepsilon_г$=8,96%. Для образца одногребеночное трико закрытое при этих же условиях получили относительную деформацию по вертикали $\varepsilon_в$ = 6,63%, а по горизонтали $\varepsilon_г$=2,82% [3…4].

Уменьшим теперь размеры ячеек в каждом образце, например, в два раза ($n_я$=2) и уменьшим жесткость нити в 4 раза ($n_ж$ =0,25). В этом случае согласно формуле (4) для обеспечения той же самой относительной деформации к образцам нужно приложить удельную силу $F_2=F_1 \cdot n_я^3 \cdot n_ж = F_1 \cdot 2^3 \cdot 0{,}25 = 2 \cdot F_1$, то есть в два раза большую, чем к первому образцу, в два раза больше будет и общая сила, действующая на каждую сторону второго образца, следовательно, она должна быть равна 300 сН.

Ранее нами была разработана программа по расчету двумерной деформации трикотажа при симметричной нагрузке образцов по горизонтали и по вертикали [1], [2]. Она была использована для расчета относительной деформации кулирного трикотажа и одногребеночных трико открытое, трико закрытое [3…5]. При сопоставлении теоретических расчетов с экспериментом было обнаружено хорошее согласие между ними, что указывает на правильность подхода, положенного в основу расчета, и позволяет использовать эту программу для проверки сделанных выше выводов.

Расчеты по программе при упомянутой симметричной нагрузке в 300 Н дают для кулирного трикотажа $\varepsilon_в$ = 0,15%, $\varepsilon_г$=10,5%, для одногребеночного трико открытое $\varepsilon_в$=2,29%, $\varepsilon_г$ = 8,96%, для одногребеночного трико закрытое $\varepsilon_в$ = 6,63%, $\varepsilon_г$ = 2,82%, что совпадает с относительной деформацией первого образца при силе 150 Н и подтверждает их одинаковое относительное удлинение.

Рассмотрим теперь несимметричную нагрузку при отсутствии перемещения контактов по повторяющемуся элементу.

Пусть на первый образец по вертикали действует сила 150 сН, а по горизонтали – сила 75 сН. При одинаковых относительных удлинениях согласно формуле (4) на второй образец по вертикали должна действовать сила 300 сН, а по горизонтали – 150 сН.

Проведем проверку и этих выводов с помощью программы. Для кулирного трикотажа при этих силах для первого образца получаем $\varepsilon_в$ = 0,19%, $\varepsilon_г$= 6,95%, для второго образца $\varepsilon_в$ = 0,19%, $\varepsilon_г$= 6,95%, для одногребеночных трико открытое первый образец $\varepsilon_в$ = 1,55%, $\varepsilon_г$= 7,25%, второй образец $\varepsilon_в$ = 1,55%, $\varepsilon_г$ = 7,25%, для трико одногребеночное закрытое первый образец $\varepsilon_в$=3,78%, $\varepsilon_г$=1,42%, второй образец $\varepsilon_в$=3,78%, $\varepsilon_г$= 1,42%, то есть и здесь относительные деформации при нагрузках, рассчитанных по формуле (4), для первого и второго образцов совпадают.

Таким образом, формула (4) может быть использована для оценки влияния плотности трикотажа и жесткости нити на изгиб, на деформационные свойства трикотажа.

ВЫВОДЫ

Используя нелинейную теорию упругости, было показано, что если при неизменной форме ячеек увеличивать жесткость нити на изгиб и уменьшать в $n_я$ раз размеры ячеек по вертикали и по горизонтали, то жесткость трикотажа при его двухосном растяжении прямо пропорциональна жесткости нити на изгиб, прямо пропорциональна $n_я^3$ и обратно пропорциональна кубу длины нити в петле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Котович О.С.* Применение нелинейной теории упругости к расчету двумерной деформации трикотажа // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2010, №8. С.69…72.

2. *Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Котович О.С.* Расчет двумерной деформации трикотажа трикотажа // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2011, №1. С.80…83.

3. *Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Котович О.С.* Расчет деформации трико одногребеночное открытое // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2011, №2. С.57…60.

4. *Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Котович О.С.* Расчет деформации трико одногребеночное закрытое // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2011, №3. С.75…78.

5. *Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев Н.В.* Расчет деформации кулирного трикотажа при двумерной симметричной нагрузке с помощью нелинейной теории упругости // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2013, №5. С.74…77.

Рекомендована кафедрой технологии трикотажного производства. Поступила 15.01.14.