УДК [677.025.071.252.: 677.53]: 677.071.4

ТЕОРИЯ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НИТИ ПРИ ВЯЗАНИИ

THE THEORY AND CRITERIA OF STABILITY OF THE STRING AT KNITTING

В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.В. ЗАВАРУЕВ, Т.И. ПОЛЯКОВА, А.И. ПАНИН, О.А. ГОНЧАРОВА
V.P. SHCHERBAKOV, N.V. ZAVARUEV, T.I. POLJAKOVA, A.I. PANIN, O.A. GONCHAROVA

(Московский государственный университет дизайна и технологии)
(Moscow State University of Design and Technology)
E-mail: office@msta.ac.ru

Рассмотрен вопрос об устойчивости упругой нити, находящейся под действием приложенных к его концам растягивающих сил и скручивающих моментов. Показано, что линеаризированные дифференциальные уравнения достаточны для исследования критических состояний скрученной и растянутой нити. Выявлено, что при увеличении натяжения критический крутящий момент, при котором происходит потеря устойчивости нити, возрастает. Приведены числовые значения критических характеристик устойчивости, которые скорректированы с учетом изменения жесткости нити при кручении по мере изменения крутки.

The question on stability of the elastic string which are taking place under action of stretching(dragging out) forces enclosed by his(its) ends and braiding moments is considered. It is shown, that linearized differential equations are sufficient for research of critical conditions of the braided and stretched(dragged out) string. It is revealed, that at increase of a tension the critical twisting moment at which there is a loss of stability of a string, grows. Numerical values of critical characteristics of stability which are corrected in view of change of rigidity of a string at torsion on a measure change of twine are given.

Ключевые слова: нить, устойчивость, кручение, жесткость, натяжение, крутящий момент.

Keywords: a string, stability, torsion, rigidity, a tension, twisting moment.

Переработка на трикотажных машинах крученых продуктов, к которым относятся нити и пряжа, зачастую сопровождается образованием сукрутин. Это явление свойственно именно процессу вязания, параметры которого, и в первую очередь натяжение нити, способствуют потере устойчивости нити. Известно, что если нить закручивать, то она очень быстро примет криволинейную форму петли, которая является начальной стадией образования сукрутин. Ясно, что, натягивая крученую нить, мы увеличиваем крутящий момент, при котором происходит потеря устойчивости. Но вязание происходит при очень малом натяжении провязываемой нити, в пределах от 2 до 10 сН, что обеспечивает надежное прокладывание нити на иглу в соответствии с переплетением и петлеобразованием без обрыва нити. Кроме того, при движении нити к петлеобразующей системе она получает дополнительное кручение при сматывании с бобины и взаимодействии с фрикционными поверхностями нитепроводящих элементов и механизмов натяжения.

Вопрос об устойчивости прямолинейного упругого стержня, находящегося под действием приложенных к его концам сжимающих сил и скручивающих моментов, был рассмотрен Гринхиллом еще в 1883 г. Предполагая концы стержня опертыми, Гринхилл нашел, что критическая длина стержня ℓ, за которой прямолинейная форма теряет устойчивость, определяется равенством

$$\frac{M^2}{4H^2}+\frac{P}{H}=\frac{\pi^2}{\ell^2}, \qquad (1)$$

где P – сжимающая сила; M – крутящий момент; H – жесткость стержня при изгибе. В зарубежной и отечественной литературе до сих пор для оценки устойчивости упругой нити используется условие, полученное этим известным автором. Е.Л. Николаи [1] получил уточненное решение задачи об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня. Хотя в этой работе рассмотрен сжатый стержень, исходные дифференциальные уравнения в форме уравнений Кирхгофа и полученное решение распространено и на растянутый стержень. Вопрос об устойчивости сжатого и скрученного прямолинейного стержня в случае заделанных обоих концов был рассмотрен С.П. Тимошенко [2], который пришел к результату, аналогичному равенству (1).

В то же время в книге [3] со ссылками на других авторов видим несколько неожиданный вывод: имеющиеся экспериментальные данные не подтверждают практической пригодности равенства (1) для количественного определения критических величин крутящего момента, продольной силы и длины. И если научные исследования и учебные руководства Е.Л. Николаи, С.П. Тимошенко являются классическими по строгости и предельной ясности изложения, то несоответствие для приложений следует искать прежде всего в неверном применении теории равновесия и устойчивости упругих тонких стержней.

В предлагаемой работе дано другое, отличное от цитируемых работ, решение задачи определения критического крутящего момента шарнирно закрепленной нити в зависимости от растягивающей силы.

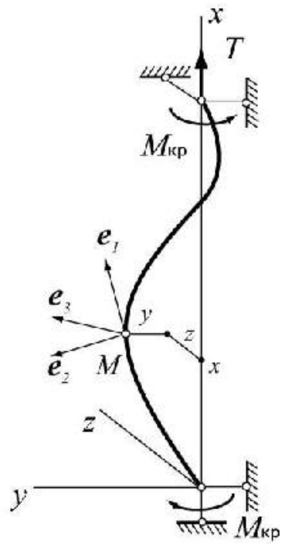

Рис. 1

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси в предположении, что перемещения малы [4]. В сечении x (рис. 1) изгибающие моменты от силы T и крутящего момента M равны: 1) – в плоскости xy: Py и Mz'; 2) – в плоскости xz: Pz и –My'. Знак перед моментом здесь взят в соответствии с обычным правилом знаков, применяемым в сопротивлении материалов: "плюс" берется, если момент направлен в сторону увеличения положительной кривизны в соответствующей плоскости; "минус" – момент уменьшает положительную кривизну.

Почти любой расчет крученого продукта предполагает знание его жесткостных характеристик. Клебшем были предложены уравнения, основанные на пропорциональности компонентов кривизны и кручения при деформировании компонентам главного момента внутренних усилий:

$$M_1 = A_1(\kappa_1 - \kappa_{10}),$$
$$M_2 = A_2(\kappa_2 - \kappa_{20}),$$
$$M_3 = A_3(\kappa_3 - \kappa_{30}),$$

где κ_i – кручение и кривизна в естественном (недеформированном) состоянии, κ_1 – кручение осевой линии нити, возникающее при скручивании элемента нити крутящим моментом M_1; κ_2 и κ_3 – проекции кривизны пространственной осевой линии при изгибе нити в двух взаимно перпендикулярных плоскостях под действием моментов M_2 и M_3; A_1 – жесткость при кручении; A_2 и A_3 – жесткости при изгибе. Величины A_j определяются соотношениями:

$$A_1 = B = GJ_p, \quad A_2 = A_3 = H = EJ,$$

где E – модуль упругости; G – модуль сдвига; $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инерции площади сечения; $I = \frac{\pi d^4}{64}$ – осевой момент инерции (поперечное сечение нити принято в форме круга диаметра d=2r).

Теперь уравнения упругой линии запишем в виде:

$$Hy'' = Ty + M_1 z', \qquad Hz'' = Tz - M_1 y' \tag{2}$$

Решение этой системы представим в виде:

$$y = C_1\cos k_1x + C_2\sin k_1x + C_3\cos k_2x + C_4\sin k_2x,$$
$$z = C_1\sin k_1x - C_2\cos k_1x + C_3\sin k_2x - C_4\cos k_2x, \tag{3}$$

где k_1 и k_2 – корни квадратного уравнения;

$$k^2 + \frac{M}{H}k + \frac{T}{H} = 0; \tag{4}$$

$$k_1 = -\frac{M}{2H} + \sqrt{\frac{M^2}{4H^2} - \frac{T}{A}}; \qquad k_2 = -\frac{M}{2H} - \sqrt{\frac{M^2}{4H^2} - \frac{T}{H}}. \tag{5}$$

Написанные дифференциальные уравнения (2) и общее решение (3) действительны для любой криволинейной формы скрученной и растянутой упругой нити. Частное решение определяется граничными условиями, которые и обусловливают величину критических значений. В нашем случае шарнирно закрепленных концов имеем граничные условия: при x=0 y=z=0, при $x=\ell$ y=z=0.

С их учетом из системы (3) получаем четыре уравнения:

$$\begin{aligned}
&C_1 + C_3 = 0,\\
&C_2 + C_4 = 0,\\
&C_1\cos k_1\ell + C_2\sin k_1\ell + C_3\cos k_2\ell + C_4\sin k_2\ell = 0,\\
&C_1\sin k_1\ell - C_2\cos k_1\ell + C_3\sin k_2\ell - C_4\cos k_2\ell = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Система уравнений (6) может иметь отличные от нуля решения, если определитель ее будет равен нулю:

$$\det=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos k_1\ell & \sin k_1\ell & \cos k_2\ell & \sin k_2\ell \\ \sin k_1\ell & -\cos k_1\ell & \sin k_2\ell & -\cos k_2\ell \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получаем:

$$\cos\left(k_2-k_1\right)\ell=1,$$

или

$$\left(k_2-k_1\right)\ell=2\pi,$$

что полностью совпадает с решением точных дифференциальных уравнений нелинейной теории [1]. Линеаризированные дифференциальные уравнения достаточны для исследования критических состояний скрученной и растянутой нити. Конечно, после достижения нагрузкой критического значения зависимость между нагрузкой и вызываемым ею прогибом не может быть получена из приближенного уравнения изогнутой оси. Но нас интересуют прежде всего условия потери устойчивости нити, и обычные линейные уравнения сопротивления материалов, как следует из изложенного, пригодны для изучения поведения нити при кручении. Согласно формулам (5):

$$k_2-k_1=2\sqrt{\frac{M^2}{4H^2}-\frac{T}{H}},$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{M^2}{4H^2}-\frac{T}{H}}=\frac{\pi}{\ell}. \qquad (7)$$

Полученное соотношение (7) соответствует равенству (1) при отрицательном значении P (то есть растяжения нити). Критическая сжимающая сила, соответствующая так называемому основному эйлеровскому случаю, равна:

$$P_э=\frac{\pi^2 H}{\ell^2}. \qquad (8)$$

Тогда для критического крутящего момента получаем выражение:

$$M_{кр}=2\sqrt{H}\sqrt{P_э+T}. \qquad (9)$$

Таким образом, при увеличении натяжения T критический крутящий момент, при котором происходит потеря устойчивости нити, возрастает. Обозначим через φ угол, на который одно концевое сечение нити закручено по отношению к другому. Имеем [5]:

$$\varphi=\kappa_1\ell=\frac{M}{B}\ell.$$

Из формулы (7) получаем:

$$M_{кр}=2\sqrt{TH+\frac{\pi^2H^2}{\ell^2}}. \qquad (10)$$

Подставляя в формулу для φ, находим:

$$\varphi_{кр}=\frac{2\sqrt{TH+\frac{\pi^2H^2}{\ell^2}}}{B}\ell. \qquad (11)$$

При натяжении T = 0, когда нить подвергается чистому кручению, имеем:

$$\varphi_{кр}=2\pi\frac{H}{B}. \qquad (12)$$

Для числовой оценки сил и моментов нужны данные жесткостных характеристик H и B. Теория и методика определения величин жесткости при изгибе и жесткости нити при кручении разработана нами и изложена в предыдущих статьях. Определение жесткости нити при кручении проведено методом крутильного динамометра. Идея метода основана на сравнении крутящего момента эталонного элемента с равновесным моментом исследуемой нити. Жесткость при кручении чистошерстяной пряжи линейной плотности 31 текс с круткой К = 560 кручений на метр равна $B_у$ = 0,042 сН·мм^2. При экспериментальном определении жесткости при изгибе Н использован метод нелинейного изгиба нитей двумя сосредоточенными силами: консольная нить несет на свободном конце сосредоточенную нагрузку. Жесткость при изгибе той же чистошерстяной пряжи равна Н = 0,748 сН·мм^2, отношение жесткостей е=Н/В=17,81. Тогда критический угол, на который одно концевое сечение закручено по отношению к другому и начинается потеря устойчивости и образование сукрутин, равен $\varphi_{кр} = 111{,}9$ рад. Это соответствует числу оборотов $N_{кр} = \varphi_{кр} / (2\pi) = 17{,}8$. Конечно, $N_{кр} = 17{,}8$ представляет собой не критическую крутку в обычном технологическом понимании, а число оборотов пряжи с круткой 560 кручений на метр, которое ей надо дополнительно придать для начала образования сукрутин.

Обратимся теперь к устойчивости упругой нити, предполагая оба конца нити заделанными [1]. Е.Л. Николаи для критической длины $\ell_{кр}$ получил выражение:

$$\ell_{кр} = \frac{4H\theta_{кр}}{M + \sqrt{M^2 + 4HT}} = 2\theta_{кр}\sqrt{c}\sqrt{\frac{H}{T}}, \quad (13)$$

где $$\frac{1}{c} = \frac{\left(M + \sqrt{M^2 + 4HT}\right)^2}{4HT}; \quad (14)$$

$\theta_{кр}$ – наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{ctg} c\theta - \frac{1}{c\theta} + \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\theta} = 0.$

Из формулы (14) видно, что с = 0 при Т = 0 (чистое кручение). В этом случае $\theta_{кр} = 4{,}4934$. Критическое значение угла $\varphi_{кр}$, на который одно концевое сечение нити закручено по отношению к другому, равно:

$$\varphi_{кр} = 2\frac{H}{B}\theta_{кр} = 2\frac{H}{B}4{,}4934. \quad (15)$$

Сравнивая формулы (12) и (15), легко заметить разницу решений в различных условиях закрепления нити. Это различие тем существеннее, чем больше растягивающая нагрузка (натяжение Т). Кроме того, из формулы (14) следует: с=-1 при $M^2 + 4HT = 0$, и $\theta_{кр} = \infty$. При определенном значении растягивающей силы нить вообще не может потерять устойчивость, если при увеличении крутящего момента одновременно происходит и соответствующее увеличение натяжения.

Полученные здесь результаты легко подтвердить экспериментально, если опыт проводится в полном соответствии с условиями, в которых разработана теория.

В решении рассмотренной задачи скрыта одна тонкость, которая не отмечена ни в одной из работ в этой области, в том числе и нами в [1]. Особенностью текстильных нитей является увеличение их жесткостных характеристик, особенно жесткости при кручении, по мере увеличения крутки. Еще Г.Л. Слонимский и Л.Е. Осипова [5] показали, что жесткость B_{min} нескрученной нити, имеющей в сечении m не взаимодействующих между собой элементарных нитей с жесткостью каждой B_0, равна:

$$B_{min} = mB_0. \quad (16)$$

Для монолитно связанных элементарных нитей она составляет:

$$B_{max} = m^2B_0. \quad (17)$$

Критическое значение числа оборотов $N_{кр}$, при котором происходит потеря прямолинейной формы нити и начало образования сукрутин при кручении, определяется формулами (11) и (12). Ясно, что увеличение жесткости нитей В приводит к снижению $N_{кр}$. Оно и понятно. К примеру, получим и вычислим критерий потери устойчивости металлической мононити большой жесткостью при кручении. Для нити круглого сечения $H = \frac{\pi d^4}{64} E$, $B = \frac{\pi d^4}{32} G$, где E – модуль упругости, G – модуль сдвига. С учетом $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (здесь ν – коэффициент Пуассона) окончательно получим:

$$\varphi_{кр} = 2\pi(1+\nu). \qquad (18)$$

В книге [6] приведены данные для постоянных упругости, полученные Кестером и опубликованные им в серии статей, представляющих собой к настоящему времени один из основных источников по изучению модулей упругости, определенных из вибрационных испытаний. Так, для молибдена коэффициент Пуассона ν=0,31, для вольфрама ν=0,30. Тогда согласно формуле (18) прямолинейная форма нити устойчива при $\varphi < 8,23$ рад для молибденовой проволоки и $\varphi < 8,17$ рад для вольфрамовой. Напомним, что для шерстяной пряжи $\varphi_{кр} = 111,9$ рад.

С учетом изменения жесткости B по мере изменении крутки все критические характеристики устойчивости нити должны быть скорректированы. Для аппроксимации кривой принята экспоненциальная функция:

$$B(K) = b_0 e^{bK}. \qquad (19)$$

Общепринятым при решении задач выравнивания или сглаживания является метод наименьших квадратов: $\sum_{i=1}^{n}\left(B_{iэ} - b_0 e^{bK_i}\right)^2 \to \min$. Решением оптимизационной задачи являются b_0=0,018 и b=0,528. Если аппроксимировать экспериментальные данные методом линеаризации, как обычно и делается, когда нелинейная функция линеаризуется, а далее осуществляется подбор параметров линейной функции, то разница значений параметров показательной функции, вычисленных двумя способами, существенна. Значения, полученные методом оптимизации, заслуживают большего доверия, так как в случае линеаризации выбранные оценки не удовлетворяют требованию эффективности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаи Е.Л.* Труды по механике. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955.

2. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем, – М.: Гостехиздат, 1946. С.74.

3. *Зарецкас С.-Г.С.* Механические свойства нитей при кручении. – М.: Легкая индустрия, 1979.

4. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1996.

5. *Щербаков В.П., Скуланова Н.С.* Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008.

6. *Белл Ф.Дж.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. – Часть 1. – М.: Наука, 1984.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 14.06.13.