

УДК 677.071:531:517.9

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЯ
ЛУБЯНОГО ВОЛОКНА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

**COMPUTER SIMULATION OF LAYER BAST FIBERS WITH A
CYLINDRICAL SURFACE**

С.Н.РАЗИН, Н.И.КОВАЛЕНКО
S.N.RAZIN, N.I.KOVALENKO

(Костромской государственный технологический университет)
(Kostroma State Technological University)
E-mail: info@kstu.edu.ru

В работе рассматривается задача по определению соотношения между силами натяжения в предельном состоянии в двух сечениях слоя лубяного волокна, лежащего на шероховатой цилиндрической поверхности.

This paper considers the problem of determining the ratio between the forces of tension in the ultimate limit state in the two sections of the layer bast fibers lying on a rough cylindrical surface.

Ключевые слова: лубяное волокно, нить, силы трения, силы натяжения.

Keywords: bast fiber, thread, friction force, tension force.

В работах [1...14] рассматривается вопрос, связанный с исследованием условий работы зажимного механизма трепальной машины по переработке льна агрегата МТА-2Л. Зажимной механизм состоит из двух фигурных транспортирующих ремней и нажимного ролика. Между поверхностями сопряжения ремней зажимается слой лубяного волокна (рис.1 – линия сопряжения ремней агрегата МТА-2Л: 1, 5 – вертикальные участки; 3 – горизонтальный; 2, 4 – вертикальные участки; I – верхний ремень, II – нижний ремень, III – слой).

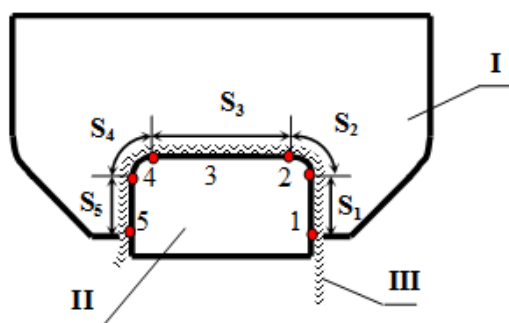


Рис. 1

Надежность зажима определяет эффективность работы этого механизма. Для оценки эффективности работы механизма и, следовательно, всего процесса трепания льна необходимо знать силу трения слоя льна о поверхности ремней и силу его натяжения, возникающую в нем от воздействия трепальных барабанов. Из соотношения сил трения и сил натяжения можно сделать заключение о надежности работы зажимного механизма.

Для определения предельной силы трения разработана математическая модель [15]. Так как слой волокна находится под действием внешнего давления, передаваемого через верхний ремень от нажимного

ролика, то оно учитывалось в математической модели. Исследование проведено для случая, когда слой огибает поверхность нижнего ремня, профиль которого имеет наряду с прямолинейными и участки, являющиеся дугами окружности.

Однако профиль сечения транспортирующих ремней может быть и другим, в частности, криволинейным. В литературных источниках неизвестны работы, посвященные определению наиболее рациональной линии сопряжения ремней зажимного механизма трепальных машин. Поэтому для оценки эффективности работы зажимных механизмов необходимо разработать математическую модель по расчету сил трения слоя о контактирующие с ним поверхности различной формы.

На первом этапе решаем задачу по определению сил трения слоя о шероховатую криволинейную поверхность произвольного профиля при отсутствии внешнего давления.

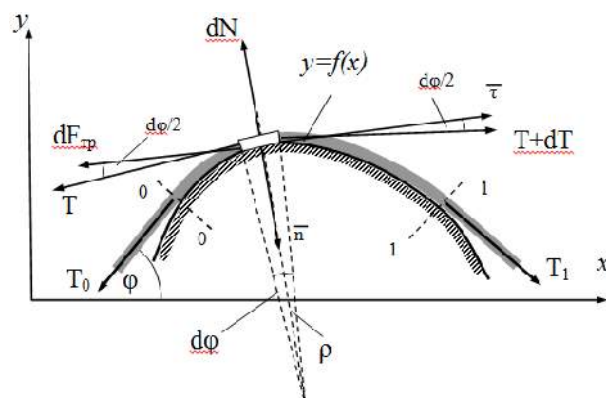


Рис. 2

Пусть, например слой лежит на шероховатой поверхности, профиль которой описывается уравнением $y = f(x)$ (рис. 2 – схема сил, действующих на слой волокна,

лежащего на поверхности цилиндра произвольной формы). Решаем задачу при следующих допущениях. Будем считать слой в любом сечении ремней по длине транспортирующей секции равномерным по толщине и плотности, тонким, несминаемым и нерастяжимым. Кроме того, будем пренебрегать весом слоя, вследствие его относительной малости, а также будем считать поверхности ремней недеформируемыми. При сделанных допущениях слой волокон можно считать тканью. Согласно положениям механики нити [16] простейшая теоретическая модель ткани представляет собой идеально гибкую материальную поверхность, имеющую нулевую толщину и нулевую жесткость при

деформации изгиба. Выделив в слое полосу шириной 1 см, рассмотрим силы действующие на нее. Поскольку волокна слоя в выделенной полоске находятся примерно в одинаковых условиях (различия заключаются в том, что по длине ремня нагрузка на него со стороны роликов, а также нагрузка на обрабатываемый слой со стороны бильных планок изменяется), то будем считать выделенную полосу слоя нитью – предельный образ тела, поперечными размерами которого можно пренебречь. Выделим бесконечно малый участок нити и укажем силы, действующие на данном участке. Записываем уравнения равновесия в проекциях на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= (T + dT) \cos\left(\phi - \frac{d\phi}{2}\right) - T \cos\left(\phi + \frac{d\phi}{2}\right) - dF_{\text{тр}} \cos \phi - dN \sin \phi = 0, \\ \sum F_y &= (T + dT) \sin\left(\phi - \frac{d\phi}{2}\right) - T \sin\left(\phi + \frac{d\phi}{2}\right) - dF_{\text{тр}} \sin \phi + dN \cos \phi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где T – сила натяжения в ведомой ветви нити; $T + dT$ – сила натяжения в ведущей ветви нити; N – равнодействующая сил реакции цилиндра на нить; $F_{\text{тр}}$ – сила трения; ϕ – угол наклона касательной к кри-

вой $y = f(x)$. Используя тригонометрические формулы для синуса и косинуса разности аргументов и свойства бесконечно малых величин, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\phi \pm \frac{d\phi}{2}\right) &= \cos \phi \cdot \cos \frac{d\phi}{2} \mp \sin \phi \cdot \sin \frac{d\phi}{2} \approx \cos \phi \mp \frac{d\phi}{2} \sin \phi, \\ \sin\left(\phi \pm \frac{d\phi}{2}\right) &= \sin \phi \cdot \cos \frac{d\phi}{2} \pm \cos \phi \cdot \sin \frac{d\phi}{2} \approx \sin \phi \pm \frac{d\phi}{2} \cos \phi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= (T + dT) \left(\cos \phi + \frac{d\phi}{2} \sin \phi\right) - T \left(\cos \phi - \frac{d\phi}{2} \sin \phi\right) - dF_{\text{тр}} \cos \phi - dN \sin \phi = 0, \\ \sum F_y &= (T + dT) \left(\sin \phi - \frac{d\phi}{2} \cos \phi\right) - T \left(\sin \phi + \frac{d\phi}{2} \cos \phi\right) - dF_{\text{тр}} \sin \phi + dN \cos \phi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Раскрывая скобки, приводя подобные члены и пренебрегая малыми второго по-

рядка, получаем:

$$\left. \begin{aligned} T d\phi \sin \phi + dT \cos \phi - dN \cos \phi - dN \sin \phi &= 0, \\ -T d\phi \cos \phi + dT \sin \phi - dN \sin \phi + dN \cos \phi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где f – коэффициент трения нити о поверхность цилиндра.

Умножив обе части первого уравнения системы на $\cos \phi$, обе части второго уравнения на $\sin \phi$, сложив получившиеся уравнения и приведя подобные члены, получим:

$$dN = \frac{1}{f} dT. \quad (5)$$

Подставляя полученное равенство, в первое уравнение системы, получим:

$$\frac{dT}{T} = f d\phi. \quad (6)$$

Исходя из геометрического смысла производной имеем:

$$y' = \operatorname{tg} \phi,$$

или

$$\phi = \operatorname{arctg}(y'),$$

тогда

$$d\phi = \frac{y''}{1+y'^2} dx. \quad (7)$$

Подставив равенство (7) в (6), дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$\frac{dT}{T} = f \frac{y''}{1+y'^2} dx. \quad (8)$$

Интегрируя данное дифференциальное уравнение, получаем:

$$T_1 = T_0 \exp\left(\int_a^b f \frac{y''}{1+y'^2} dx\right), \quad (9)$$

где T_1, T_0 – силы натяжения в ведущей и ведомой ветвях нити, f – коэффициент трения нити о поверхность цилиндра.

Исходя из физического смысла задачи, если ветвь 0 – ведомая, а 1 – ведущая, то $T_1 > T_0$. Данное неравенство будет выполняться, если в формуле (9) будет выполне-

но условие $y'' > 0$. Это соответствует только вогнутой кривой. Для того, чтобы по формуле (9) можно было находить соотношение между силами натяжения в предельном случае для выпуклых кривых, запишем (9) в следующем виде:

$$T_1 = T_0 \exp\left(\int_a^b f \frac{|y''|}{1+y'^2} dx\right). \quad (10)$$

Отметим, что формула (10) справедлива только для тех случаев, когда нить располагается в плоскости, перпендикулярной оси цилиндрической поверхности, на которой она лежит и, кроме того, на всем интервале $[a; b]$ вторая производная не меняет знак. Рассмотрим несколько частных случаев.

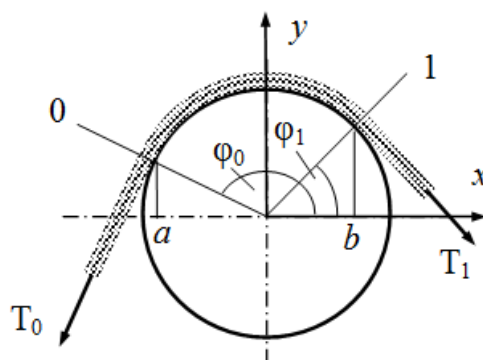


Рис. 3

1. Нить контактирует с цилиндром радиуса R (рис. 3 – взаимодействие слоя с поверхностью кругового цилиндра). В этом случае:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{R^2 - x^2}, \\ y' &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \\ y'' &= \frac{-R^2}{\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}, \end{aligned}$$

тогда формула (10) принимает вид:

$$T_1 = T_0 \exp\left(\int_a^b f \frac{\frac{R^2}{\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}}{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right]^2} dx\right),$$

упростив данное равенство, получаем:

$$T_1 = T_0 \exp\left(f \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right),$$

$$T_1 = T_0 \exp\left(f \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = T_0 \exp\left(f \int_{\arccos \frac{a}{R}}^{\arccos \frac{b}{R}} \frac{-R \sin \phi \cdot d\phi}{R \sin \phi}\right) = T_0 \exp\left[-f \left(\arccos \frac{b}{R} - \arccos \frac{a}{R}\right)\right]$$

Но $\arccos\left(\frac{b}{R}\right) = \phi_1$, $\arccos\left(\frac{a}{R}\right) = \phi_0$, то
есть

$$T_1 = T_0 \exp[f(\phi_0 - \phi_1)],$$

но $\phi_0 - \phi_1 = \phi$ – угол охвата, то есть получаем формулу Эйлера:

$$T_1 = T_0 e^{f\phi}.$$

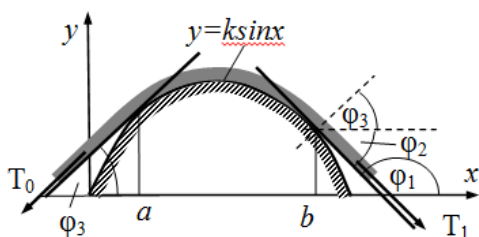


Рис. 4

$$T_1 = T_0 \exp[-f(\arctg(k \cos b) - \arctg(k \cos a))]. \quad (11)$$

Учитывая, что геометрический смысл производной – это тангенс угла наклона

касательной к кривой, имеем:

$$\arctg(k \cos b) = \arctg(y'(b)) = \arctg(\operatorname{tg}\phi_1) = \arctg(-\operatorname{tg}\phi_2) = -\phi_2, \quad (12)$$

$$\arctg(k \cos a) = \arctg(y'(a)) = \arctg(\operatorname{tg}\phi_3) = \phi_3. \quad (13)$$

С учетом этого формула (11) примет вид:

$$T_1 = T_0 \exp[-f(-\phi_2 - \phi_3)] = T_0 \exp[f(\phi_2 + \phi_3)] = T_0 \exp(f\Delta\phi). \quad (14)$$

Таким образом, последнюю формулу можно представить в виде, аналогичном формуле Эйлера:

$$T_1 = T_0 e^{f\Delta\phi}.$$

Но в этом случае $\Delta\phi$ – угол поворота касательной к нити при переходе от сечения 0 к сечению 1, а не угол обхвата, который в данном случае не имеет геометрического смысла, поскольку центры кривизны нити на разных участках расположены в разных точках.

вычисляя интеграл с заменой переменной $x = R \cos \phi$, получаем:

2. Нить контактирует с криволинейной поверхностью профиль которой описывается уравнением $y = k \sin x$ (рис. 4 – взаимодействие слоя с поверхностью, профиль которой описывается уравнением $y = k \sin x$). В этом случае контакт нити с поверхностью будет происходить на всем интервале $[a; b]$, если $[a; b] \in [0; \pi]$, така как на этом интервале функция $y = k \sin x$ является выпуклой ($y'' < 0$). Подставив $y' = k \cos x$ и $y'' = -k \sin x$ в (10), получим:

$$T_1 = T_0 \exp\left(f \int_a^b \frac{fk \sin x dx}{1 + k^2 \cos^2 x}\right).$$

Проведя интегрирование, находим:

ВЫВОДЫ

1. Получена математическая модель, связывающая силы натяжения гибкой нити в ведущей и ведомой ветвях для случая контакта нити с шероховатой цилиндрической поверхностью произвольной формы;

2. Связь между силами натяжения гибкой нити при контакте с поверхностью произвольной формы имеет вид формулы Эйлера, где под углом охвата следует понимать угол между касательными к нити в ведомой и ведущей ветвях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Разин С.Н., Гришин А.Г., Коваленко Н.И. Проверка формулы Эйлера при исследовании взаимодействия гибкой нити с шероховатым цилиндром // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, №4С.

2. Коваленко Н.И., Разин С.Н. Определение силы зажима пряжи произвольной длины в транспортирующих ремнях трепальной машины // Вестник КГТУ. – Кострома, 2006, №13.

3. Коваленко Н.И., Разин С.Н. Возможности снижения сил натяжения прядей льна вблизи их зажима при трепании // Вестник ВНИИЛК. – Кострома, 2007, №3.

4. Коваленко Н.И. Анализ конструктивных решений транспортирующих ремней трепальных машин на основе их компьютерного моделирования // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007, №6С.

5. Коваленко Н.И., Разин С.Н. Компьютерное моделирование процесса взаимодействия гибкой нити с шероховатой поверхностью. – Деп. в ВИНТИ. – №432-В2008. – М., 2008.

6. Коваленко Н.И., Разин С.Н., Балабаев П.С., Соколов А.В. Экспериментальное определение жесткости транспортирующих ремней трепальной машины // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2009, №4С.

7. Коваленко Н.И., Разин С.Н., Соколов А.В. Направления исследования и совершенствования

расчетов элементов транспортирующего механизма трепальной машины для льна // Вестник КГТУ. – Кострома, 2009, №21.

8. Коваленко Н.И., Разин С.Н., Соколов А.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния моделей транспортирующих ремней трепальной машины // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2010, №5.

9. Коваленко Н.И., Разин С.Н., Соколов А.В. Моделирование некоторых параметров нажимного устройства трепальной машины // Вестник КГТУ. – Кострома, 2010 №23.

10. Коваленко Н.И., Разин С.Н., Соколов А.В. Моделирование взаимодействия элементов транспортирующего механизма трепальной машины // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2011, №5.

11. Коваленко Н.И., Разин С.Н., Буров М.С., Коржнев В.Н. Компьютерное моделирование транспортирующих ремней зажимного механизма трепальной машины // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2012, №4.

12. Коваленко Н.И., Разин С.Н., Буров М.С. Математическое моделирование зажима слоя в транспортирующих ремнях трепальной машины // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2012, №5.

13. Разин С.Н., Коваленко Н.И., Буров М.С. Моделирование процесса взаимодействия слоя льна с рабочими органами трепальной машины // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2013, №1.

14. Коваленко Н.И., Разин С.Н., Соколов А.В. Влияние расстояния между нажимными роликами на силу зажима слоя в ремнях трепальной машины // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2013, №2.

15. Коваленко Н.И. Совершенствование транспортирующего механизма трепальной машины: Дис. ... канд. техн. наук. – Кострома, 2005.

16. Мигушов И.И. Механика текстильной нити и ткани. – М.: Легкая индустрия, 1980.

Рекомендована кафедрой инженерной графики, теоретической и прикладной механики. Поступила 22.03.14.