

3-D МОДЕЛИ ФОРМЫ ПАКОВКИ ПАРТИОННОГО СНОВАНИЯ

3-D SHAPE MODEL OF A PACKAGE OF BATCHES WARPING

Н.А. КУЛИДА, А.В. КРУГЛОВ
N.A. KULIDA, A.V. KRUGLOV

(Ивановский государственный политехнический университет)
(Ivanovo State Polytechnical University)
E-mail: info@ivgpu.com

Получены математические модели формы паковки партионного снования, позволяющие описать различные пороки намотки: нецилиндричность, бугристость, некруглость и др. Полученные модели использованы при определении объема пряжи на паковке.

Mathematical models of the form of a package of batches reason to describe various vices winding: acylindrical, roughness, out of round, etc. the models used are designed when determining the amount of yarn on a package.

Ключевые слова: партионное снование, форма намотки, цилиндрическая система координат, пороки намотки, объем паковки.

Keywords: beam warping, batches base form of winding, cylindrical coordinate system, vices, coiling, the volume of take-up package.

В настоящее время при изучении процесса формирования сновальных валов чаще всего используется плоская модель формы паковки или 2-D модель, в соответствии с которой любое ее поперечное сечение имеет вид кольца [1...4], а сама паковка представляется в виде полого прямого кругового цилиндра. При использовании модели намотки в виде спирали Архимеда [5], [6] объем намотки также вычисляется для прямого кругового цилиндра, то есть принимается ограничение об отсутствии пороков намотки. Подобное представление не позволяет решать зада-

чи, связанные с отклонением формы паковки от цилиндрической.

В соответствии с [7] неправильная форма паковки относится к порокам намотки и представляет собой "...порок в виде намотки нити бугристой, жгутовой, лентами завышенного или заниженного диаметра, с наличием вогнутости или выпуклости поверхности...", аналогичное определение порока намотки в виде бугристости как порока в виде выступов отдельных слоев намотки химической нити имеется в стандарте [8].

Для описания формы паковки используем модель в цилиндрической системе

координат [9] либо, когда это удобно, в декартовой системе координат. Пряжа на сновальном валу в отсутствие пороков намотки занимает объем полого цилиндра, в котором внешний цилиндр имеет радиус R , а внутренний – r . В цилиндрической системе координат выберем плоскость с полярной системой координат с полюсом O и полярной осью Ox . Ось аппликат Oz выберем таким образом, чтобы увеличение полярного угла φ при наблюдении с положительного направления оси аппликат Oz происходило против часовой стрелки.

Совместим ось полого цилиндра с полярной осью Ox , а его основание с плоскостью с полярной системой координат. Тогда уравнение поверхности внешнего цилиндра имеет вид $\rho(\varphi, z) = R$, а внутреннего – $\rho(\varphi, z) = r$. Будем в дальнейшем считать, если это не оговаривается особо, что внутренняя поверхность намотки пряжи не имеет отклонений от формы прямого кругового цилиндра, поэтому уравнение поверхности внутреннего цилиндра всегда имеет вид $\rho(\varphi, z) = r$. Тогда множество точек тела паковки в цилиндрической системе координат может быть описано как

$$S\{(\varphi, \rho, z) | 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \leq \rho \leq R, 0 \leq z \leq H\}, \quad (1)$$

где H – длина сновального вала.

При намотке с пороком, когда сновальный вал имеет, например, форму кругового усеченного конуса:

$$S\{(\varphi, \rho, z) | 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \leq \rho \leq \rho_0 + az, 0 \leq z \leq H\}, \quad (2)$$

где $a = (\rho_k - \rho_0)/H$, а ρ_k, ρ_0 – радиус сечения конуса при z , равном соответствен-

но 0 и H , при этом, если $\rho_k > \rho_0$, то $a > 0$, в противном случае $a < 0$.

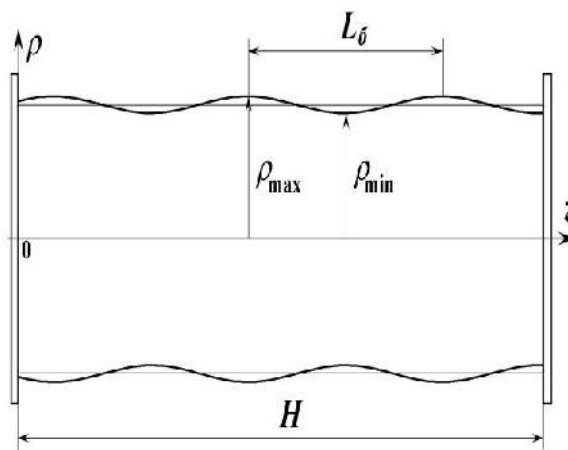


Рис. 1

При формировании паковки с бугристостью намотки (рис. 1 – $\rho(z) = 0,30 + 0,012 \sin(12,6z + 0,14)$) возможно представление ее в виде периодически изменяющегося вдоль аппликаты z радиуса:

$$\rho(z) = \bar{\rho} + b \sin(2\pi z / L_b + \delta),$$

где L_b – длина волны бугристости; $b = (\rho_{\max} - \rho_{\min})/2$ – амплитуда изменений радиуса ρ от ρ_{\min} до ρ_{\max} ; $\bar{\rho}$ – среднее значение радиуса паковки; δ – начальный угол изменений радиуса, определяемый смещением волны бугристости относительно начала координат. Если это смещение обозначить как Δ , то $\delta = 2\pi\Delta / L_b$. Тогда множество точек тела паковки с бугристостью:

$$S\{(\varphi, \rho, z) | 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \leq \rho \leq \bar{\rho} + b \sin(2\pi z / L_b + \delta), 0 \leq z \leq H\}. \quad (3)$$

Если одновременно с бугристостью наблюдается порок намотки, при котором образующие не параллельны оси намотки, то есть паковка имеет форму усеченного конуса (поверхность 1, рис. 2), координата ρ определяется выражением

$$\rho(z) = \bar{\rho} + az + b \sin(2\pi z / L_b + \delta)$$

и

$$S\{(\varphi, \rho, z) | 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \leq \rho \leq \bar{\rho} + az + b \sin(2\pi z / L_b + \delta)\}. \quad (4)$$

Можно построить модели, описывающие другие пороки намотки, например, если образующая является параболой с вершиной в середине вала, то паковка имеет вид, представленный поверхностью 2 на рис. 2 (Поверхность 1: $\rho(z) = 0,30 + 0,029z + 0,012\sin(12,6z + 0,14)$. Поверхность 2: $\rho(z) = 0,041z^2 - 0,057z + 0,30$).

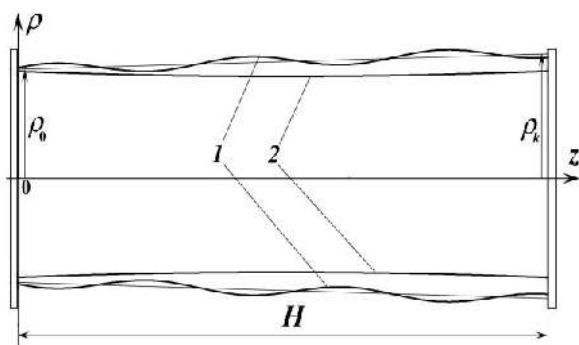


Рис. 2

Аналогично определяется уравнение образующей, когда паковка представляет собой бочку параболической или сферической формы.

Другая группа пороков намотки связана с отличием поперечного сечения паковки от круга, например, при овальной форме поперечного сечения. В этом случае радиус намотки зависит не только от z , но и угла φ .

Пусть в поперечном сечении сновальный вал имеет форму эллипса. Тогда в полярной системе координат с началом в центре вращения уравнение эллипса [9]:

$$\rho(\varphi) = ab(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{-0,5}, \quad (5)$$

где a, b – полуоси эллипса.

Множество точек тела паковки с формой в виде эллиптического цилиндра:

$$S\{(\varphi, \rho, z) | 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \leq \rho \leq ab(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{-0,5}, 0 \leq z \leq H\}. \quad (6)$$

Современное математическое программное обеспечение позволяет наглядно осуществить визуализацию принятой модели формы намотки. Например, в Mathcad

[10] в цилиндрической системе координат паковка с бугристостью имеет вид рис. 3-а, бочкообразная форма намотки показана на рис. 3-б.

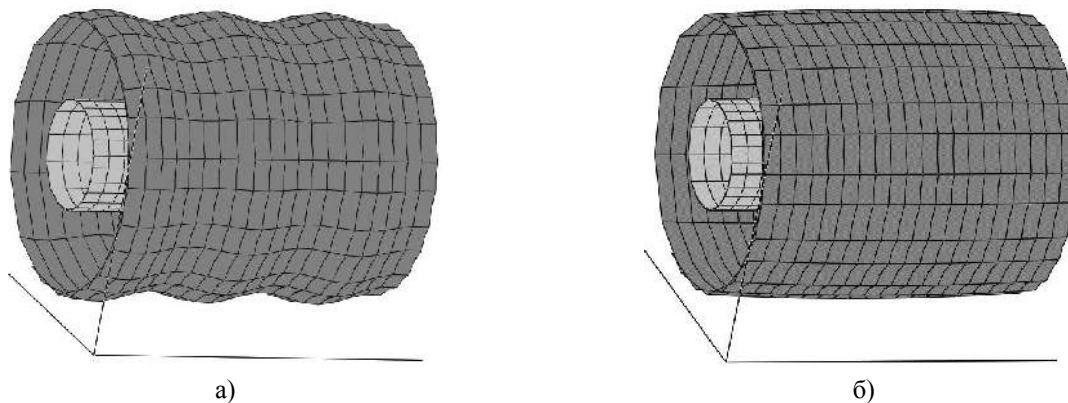


Рис. 3.

Описанные отклонения формы от идеальной обуславливают погрешность вычисления объема паковки и связанную с ней погрешность определения плотности намотки. Получим формулы вычисления объема паковки при различных пороках ее формирования.

Для паковки в форме полого усеченного конуса внутренняя ограничивающая поверхность есть цилиндр $\rho(\varphi, z) = r$, а внешняя – усеченный конус с радиусами оснований ρ_0 и ρ_k . Тогда, учитывая, что $\rho(z) = \rho_0 + az$, получаем известную формулу объема усеченного конуса:

$$V = \iiint_{(V)} dz \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_r^{\rho_0+az} \left(\int_0^H dz \right) \rho d\rho \right] d\varphi = \pi \left(\rho_0^2 H + \rho_0 a H^2 + \frac{a^2 H^3}{3} - r^2 H \right) = \pi H \left(\frac{\rho_0 \rho_k + \rho_k^2 + \rho_0^2}{3} - r^2 \right). \quad (7)$$

При вычислении объема для паковки в форме тела, ограниченного поверхностью вращения, удобнее использовать декартову систему координат, в которой в соответствии с [11] объем вычисляется по формуле $V = \pi \int_{z_1}^{z_2} f^2(z) dz$, где $f(z)$ – функ-

ция, описывающая образующую поверхности вращения; z_1, z_2 – координаты плоскостей, перпендикулярных оси вращения OZ и ограничивающих поверхность.

Для той же паковки в форме усеченного конуса:

$$V = \pi \int_{z_1}^{z_2} f_1^2(z) dz - \pi \int_{z_1}^{z_2} f_2^2(z) dz = \pi \int_0^H f_1^2(z) dz - \pi \int_0^H f_2^2(z) dz,$$

где $f_1(z) = \rho_0 + az$, $f_2(z) = r$.

Отсюда

$$V = \pi \int_0^H (\rho_0 + az)^2 dz - \pi \int_0^H r^2 dz = \pi H \left(\frac{\rho_0 \rho_k + \rho_k^2 + \rho_0^2}{3} - r^2 \right).$$

Если паковка имеет форму поверхности вращения с образующей в виде параболы, обращенной выпуклостью вверх или вниз, начало декартовой системы координат целесообразно разместить в вершине параболы. Тогда для паковки в форме параболической бочки:

$$f(z) = -e_1 z^2 + e_2,$$

$$V = \pi \int_{-H/2}^{H/2} (e_2 - e_1 z^2)^2 dz - \pi \int_{-H/2}^{H/2} r^2 dz = \pi \int_{-H/2}^{H/2} (e_2^2 - 2e_2 e_1 z^2 + e_1^2 z^4) dz - \pi \int_{-H/2}^{H/2} r^2 dz = \pi \left(e_2^2 H - \frac{e_2 e_1 H^3}{6} + \frac{e_1^2 H^5}{80} \right) - \pi r^2 H.$$

С учетом выражений для e_1 и e_2 :

$$V = \frac{\pi H}{15} (8\rho_{\max}^2 + 4\rho_{\max} \rho_{\min} + 3\rho_{\min}^2) - \pi r^2 H. \quad (8)$$

$$\text{где } e_2 = \rho_{\max}, e_1 = \frac{4(\rho_{\max} - \rho_{\min})}{H^2},$$

Здесь ρ_{\max}, ρ_{\min} – соответственно максимальный и минимальный радиусы паковки для этого случая.

Тогда:

Аналогично для паковки с образующей в виде параболы, обращенной выпуклостью вниз:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-H/2}^{H/2} (e_2 + e_1 z^2)^2 dz - \pi \int_{-H/2}^{H/2} r^2 dz = \pi \int_{-H/2}^{H/2} (e_2^2 + 2e_2 e_1 z^2 + e_1^2 z^4) dz - \pi \int_{-H/2}^{H/2} r^2 dz = \\ &= \pi \left(e_2^2 H + \frac{e_2 e_1 H^3}{6} + \frac{e_1^2 H^5}{80} \right) - \pi r^2 H. \\ V &= \frac{\pi H}{15} (8\rho_{\min}^2 + 4\rho_{\max} \rho_{\min} + 3\rho_{\max}^2) - \pi r^2 H. \quad (9) \end{aligned}$$

Для паковки с моделью формы (3):

$$V = \iiint_{(V)} dz \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_r^{\rho_0 + b \sin(2\pi z/L_b + \delta)} \left(\int_0^H dz \right) \rho d\rho \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^H \left(\frac{[\rho_0 + b \sin(2\pi z/L_b + \delta)]^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) dz \right] d\varphi.$$

Преобразовывая, найдем:

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^H \left(\frac{\rho_0^2 + 2b\rho_0 \sin(2\pi z/L_b + \delta) + b^2 \sin^2(2\pi z/L_b + \delta)}{2} - \frac{r^2}{2} \right) dz \right] d\varphi. \quad (10)$$

В частном случае, при $\delta = 0$:

$$V = \pi H (\rho_0^2 - r^2 + 0,5b^2) + [0,25b^2 L_b \sin(2\pi H/L_b) - b^2 L_b \cos^3(\pi H/L_b) \sin(\pi H/L_b) - 2b\rho_0 L_b \cos^2(\pi H/L_b) + 2b\rho_0 L_b]. \quad (11)$$

Для случая, когда поперечное сечение паковки представляет собой эллипс, в декартовой системе координат уравнение поверхности, ограничивающей паковку,

имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, отсюда объем:

$$V = \iiint_{(V)} dx dy dz = \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \left(\int_0^H dz \right) dy \right] dx - \int_{-r}^r \left[\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(\int_0^H dz \right) dy \right] dx =$$

$$= H \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \right] dx - H \int_{-r}^r \left[\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right] dx = 2H \int_{-a}^a [b\sqrt{1-x^2/a^2}] dx - 2H \int_{-r}^r [\sqrt{r^2-x^2}] dx = \pi H (ab - r^2). \quad (12)$$

В общем случае при известной форме паковки могут использоваться алгоритмы численного вычисления интегралов $\iiint_V dx dy dz$ или $\iiint_V dz \rho d\rho d\varphi$, которые реализуются микропроцессорной системой мониторинга процесса снования [12].

ВЫВОДЫ

1. Получены 3-D модели формы сновальной паковки при разных вариантах пороков намотки.

2. Получены выражения для объема паковки при различных пороках намотки, которые могут быть использованы при косвенном определении плотности намотки сновального вала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордеев В.А., Вайнер И.И., Ерошкин Ю.В. Расчет паковок рулонного типа на основе кинематических параметров наматывания // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1988, № 1. С. 29...32.
2. Ефремов Е.Д. Характеристики намотки нитей на сновальном валу // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1988, № 1. С. 32...35.
3. Кленов В.Б. Математическая модель процесса формирования паковок рулонного типа // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1973, № 1. С. 124...127.
4. Тягунов В.А. Методика определения плотности намотки пряжи на ткацких паковках // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1987, № 5. С. 51...53.
5. Кутьин А.Ю., Кутьин Ю.К. Необходимые и достаточные условия для формирования намотки с постоянной плотностью в партионном сновании // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2005, № 1. С. 49...53.

6. *Кутьин А.Ю., Кутьин Ю.К.* О моделировании процесса формирования цилиндрических паковок рулонного типа // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2001, №2. С.113...117.

7. ГОСТ 28003–88. Пороки текстильных нитей. Термины и определения.

8. ГОСТ 30125–94. Волокна химические. Термины и определения пороков.

9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973.

10. *Макаров Е.Г.* Инженерные расчеты в *Mathcad*

– СПб.: Питер, 2005.

11. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006.

12. *Демидов Н.А.* Микропроцессорная система контроля кинематических параметров партионного снования // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2012, № 4. С.159...161.

Рекомендована кафедрой автоматизации и радиоэлектроники. Поступила 30.06.14.
