УДК 621.01 +687.05

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ УЧЕТА ОРИЕНТАЦИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР МАНИПУЛЯТОРОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

GROUNDING OF THE METHOD ACCORDING TO THE ORIENTATION OF THE KINEMATIC PAIRS OF MANIPULATORS FINITE ELEMENT METHOD

Е. ТЕМИРБЕКОВ, Ж. УСЕНБЕКОВ
Y. TEMIRBEKOV, ZH. USENBEKOV

(Алматинский технологический университет, Республика Казахстан)
(Almaty Technological University, Republic of Kazakhstan)
E-mail: temirbekove@mail.ru, zh.usenbekov@mail.ru)

В статье показывается корректность подхода, изложенного в работе "Моделирование ориентации кинематических пар манипуляторов методом конечных элементов". Во-первых, корректность перехода от задачи решения МКЭ в глобальной системе координат к возможности решения задачи МКЭ в системе локальных координат узлов. Во-вторых, показывается реализация предлагаемого подхода на примере схвата манипулятора, используемого в легкой промышленности.

Here shows the correctness of the approach outlined in the paper "Modeling of the orientation kinematic pairs manipulators by finite element method". Namely, firstly, the correct transition from the problem solutions FEM in a global coordinate system to the possibility of solving the problem of FEM in a local coordinate system nodes. Secondly, the implementation of the proposed approach is shown by the example of the gripper of the manipulator used in the light industry.

Ключевые слова: манипулятор, механизм, кинематическая пара, МКЭ.

Keywords: manipulator, mechanism, kinematic pair, FEM.

Для произвольно ориентированной пространственной кинематической пары исполнительных механизмов манипуляционной системы, применяемых в легкой промышленности, в локальной системе координат методом конечных элементов (МЭК) было показано получение с помощью матриц направляющих косинусов информации о расположении узлов относительно глобальной системы координат (ГСК) (см. предыдущую статью "Моделирование ориентации кинематических пар манипуляторов методом конечных элементов"). Здесь дается подход, который позволяет использовать МКЭ для анализа жесткости и прочности РМ с парами с произвольной ориентацией в пространстве. Для решения основного уравнения равновесия в локальных системах координат применен метод жестких узлов. Показано применение метода для произвольной пространственной пары.

В кинематических парах будут перемещения, совпадающие для К общих степеней свободы, и будут перемещения, имеющие (6–К) различных компонент по кинематическим степеням свободы. В кинематических парах будут упругие перемещения, совпадающие по общим степеням свободы, а также будут разные упругие перемещения, совпадающие по кинематическим степеням свободы. Внешние силы рассматривают в ЛСК узлов. Пусть

$\mathrm{U}_i = (\mathrm{u}_1^i, \ldots, \mathrm{u}_6^i)^T$, $\tilde{\mathrm{U}}_i = \left(\tilde{\mathrm{u}}_1^i, \ldots, \tilde{\mathrm{u}}_6^i\right)^T$,
$\mathrm{F}_i = \left(\mathrm{f}_1^i, \ldots, \mathrm{f}_6^i\right)^T$, $\tilde{\mathrm{F}}_I = \left(\tilde{\mathrm{f}}_1^i, \ldots, \tilde{\mathrm{f}}_6^i\right)^T$ $(i = 1, \ldots, m)$, – векторы перемещений и внешних сил i-го узла, соответственно в ГСК OXYZ и в ЛСК $O_i$xyz i-го узла, m – общее количество узлов,

$$\left[T_i^o\right] = \begin{bmatrix} \cos\left(X, \tilde{x}_i\right) & \cos\left(X, \tilde{y}_i\right) & \cos\left(X, \tilde{z}_i\right) \\ \cos\left(Y, \tilde{x}_i\right) & \cos\left(Y, \tilde{y}_i\right) & \cos\left(Y, \tilde{z}_i\right) \\ \cos\left(Z, \tilde{x}_i\right) & \cos\left(Z, \tilde{y}_i\right) & \cos\left(Z, \tilde{z}_i\right) \end{bmatrix} \; –$$

матрица косинусов ЛСК $O_i$xyz i-го узла относительно ГСК OXYZ. Тогда для *i*-го узла должны быть уравнения:

$$\mathrm{U}_i = [\mathrm{T}_i]\tilde{\mathrm{U}}_i, \;\; \mathrm{F}_i = [\mathrm{T}_i]\tilde{\mathrm{F}}_i, \;\; \tilde{\mathrm{U}}_i = [\mathrm{T}_i]^T \mathrm{U}_i, \; \tilde{\mathrm{F}}_i = [\mathrm{T}_i]^T \mathrm{F}_i, \; i = 1, \ldots m,$$

где $[T_i]$ – это переход вектора из ЛСК i-го узла в ГСК – имеет вид:

$$[\mathrm{T}_i] = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_i^0 & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_i^0 \end{bmatrix}, i = 1, \ldots m.$$

$[T_i]$ – есть матрица вращения, поэтому она ортогональна: $\left[\mathrm{T}_i^0\right]^T = \left[\mathrm{T}_i^0\right]^{-1}$. Следовательно, $[T_i]$ также ортогональна:

$$\left[\mathrm{T}_i^0\right]^T \left[\mathrm{T}_i^0\right] = \left[\mathrm{T}_i^0\right]^{-1} \left[\mathrm{T}_i^0\right]^T = [\mathrm{E}],$$

или

$$\left[\mathrm{T}_i\right]^T = \left[\mathrm{T}_i\right]^{-1}.$$

Пусть U и F перемещений и узловые силы в ГСК OXYZ:

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= (\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots \mathrm{U}_m)^T = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots \mathrm{u}_N)^T, \\ \mathrm{F} &= (\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots \mathrm{F}_m)^T = (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots \mathrm{f}_N)^T, \end{aligned} \tag{1}$$

N – число степеней свободы модели. Аналогично для ЛСК узлов:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{U}} &= (\tilde{\mathrm{U}}_1, \tilde{\mathrm{U}}_2, \ldots \tilde{\mathrm{U}}_m)^T = (\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_2, \ldots \tilde{\mathrm{u}}_N)^T, \\ \tilde{\mathrm{F}} &= (\tilde{\mathrm{F}}_1, \tilde{\mathrm{F}}_2, \ldots \tilde{\mathrm{F}}_m)^T = (\tilde{\mathrm{f}}_1, \tilde{\mathrm{f}}_2, \ldots \tilde{\mathrm{f}}_N)^T. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда, очевидно, векторы (1) и (2) связаны уравнениями:

$$\begin{aligned} &\mathrm{U}_i = [\mathrm{T}_i]\tilde{\mathrm{U}}_i, \mathrm{F}_i = [\mathrm{T}_i]\tilde{\mathrm{F}}_i, \\ &\tilde{\mathrm{U}}_i = [\mathrm{T}_i]^T \tilde{\mathrm{U}}_i, \tilde{\mathrm{F}}_i = [\mathrm{T}_i]\tilde{\mathrm{F}}_i, \end{aligned} \tag{3}$$

где матрица имеет вид:

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{T}_m \end{bmatrix}.$$

Покажем, что [T] ортогональна:

$$[\mathrm{T}]^T [\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_1^T & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_2^T & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{T}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{T}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{T}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_1^T\mathrm{T}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_2^T\mathrm{T}_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{T}_m^T\mathrm{T}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{E} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{E} \end{bmatrix} = [\mathrm{E}].$$

То есть [T] имеет свойство ортогональности:

$$[\mathrm{T}]^T [\mathrm{T}] = [\mathrm{T}][\mathrm{T}]^T = [\mathrm{E}],$$

или

$$[\mathrm{T}]^T = [\mathrm{T}]^{-1}.$$

Основное разрешающее уравнение равновесия имеет вид [1], [2]:

$$[K] = U = [F], \tag{4}$$

где [K] – матрица жесткости в ГСК OXYZ.

Преобразуем его:

$$[T]^T[K]U = [T]^T[F],$$

или

$$[T]^T[K][E]U = [T]^T[F],$$

или

$$[T]^T[K][T][T]^TU = [T]^T[F]. \qquad (5)$$

Используя (3), запишем (5) в виде:

$$\left[T\right]^T[K][T]\tilde{U} = \left[\tilde{F}\right][\tilde{K}] = \left[T\right]^T[K][T]$$

– есть матрица жесткости модели в ЛСК узлов. Основное уравнение эквивалентно уравнению:

$$[\tilde{K}][\tilde{U}] = [\tilde{F}] \qquad (6)$$

– равновесие конструкции в ЛСК узлов, и вместо решения уравнения (4) ищем решение уравнения (6). Следовательно, предложенный метод является эквивалентным известному методу, основанному на решении (4). Это означает, что при реализации предлагаемого подхода основные принципы МКЭ и его реализация не изменяются.

П р и м е р. Рассмотрим схему конструкции схвата манипулятора (рис. 1), используемого в легкой промышленности. Модель состоит из 59 элементов, соединенных в 57 узлах.

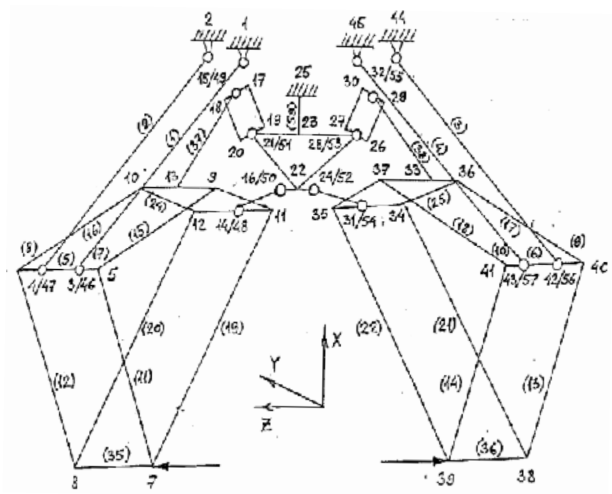

Рис. 1

ГСК OXYZ выбрана так, чтобы ось OY была перпендикулярна плоскости схвата. В соответствии с моделью вводим матрицу ID [1], [2] и координаты узлов. На конструкцию ставятся граничные условия – фиксированные шарниры в узлах 1, 2, 44, 45, которые жестко крепятся к узлу 25. Поэтому для ID они имеют вид: $[\,-1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ 0\ \ -1\,]$, здесь "0" в 5-й строке означает возможность поворота узла вокруг Y и для узла 25 вид $[\,-1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\,]$. КЭМ содержит 12 вращательных пар: узлы 3, 4, 14…16, 24, 28, 31, 32, 42, 43 входят в шарнирное соединение с узлами 46…57 соответственно, то есть эти узлы имеют общие координаты и общие 5 степеней свободы в парах (рис. 1). Например, для пары узлов 3, 46 строки ID имеют вид: $[\,0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]$, $[\,3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 0\ \ 3\,]$. Здесь числа "3" в 46-й строке указывают, что соответствующие степени свободы 3-го и 46-го узлов являются общими: для них составляют одно уравнение равновесия. "0" в 5-й позиции узла 46 указывает на разницу углов поворота 3 и 46-го узла вокруг оси Y. КЭМ нагружена силами в узлах 7 и 39 по 5 кН, их направление показано на рис. 1. Элементы модели упругие с $E = 2 \cdot 10^6\,H/м^2$, $\nu = 0{,}3$ и все имеют сечения – кольцо с D = 0,03 м и d = 0,02 м.

Реализуем вышеописанным подходом. На рис. 2 (линейные упругие перемещения модели схвата манипулятора) показаны значения смещения узлов в следующем порядке: по оси абсцисс – номер узлов (рис. 1), по оси ординат – линейное перемещение вдоль осей OX, OY, OZ ГСК – ряд 1, ряд 2 и ряд 3 соответственно. На рис. 3 (угловые упругие перемещения модели схвата манипулятора) показаны значения перемещений узлов в следующем порядке: по оси абсцисс – номера узлов (рис.1), по оси ординат – угловые перемещения вокруг осей OX, OY, OZ ГСК – ряд 1, ряд 2 и ряд 3 соответственно. Цифры 2, 3 показывают, что 3, 4, 14…16, 24, 28, 31, 32, 42, 43 узлы и их соответствующие узлы 46...57 упругого смещения имеют на пяти степенях свободы то же значение, и только угловое смещение относительно оси Y различно.

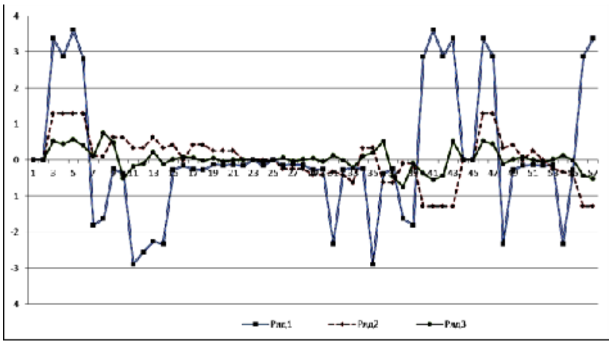

Рис. 2

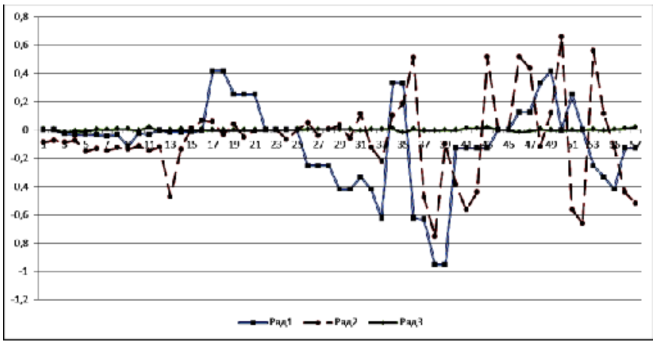

Рис. 3

В Ы В О Д Ы

1. Данный подход позволяет использовать МКЭ для механизмов с кинематическими парами произвольной ориентации в пространстве. Идея предлагаемого метода заключается в том, что основное уравнение равновесия решается методом жестких узлов в локальных системах координат пар. Основные идеи МКЭ не изменяются.

2. Разработана компьютерная программа, дается расчет модели конструкции схвата манипулятора, используемого в легкой промышленности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Мир, 1984.

2. *Джолдасбеков У.А., Темирбеков Е.С.* Некоторые аспекты анализа и синтеза механизмов высоких классов. – Астана: Акмол. ЦНТИ, 2006.

Рекомендована Научно-техническим советом. Поступила 05.05.15.