УДК 677.023.73/74

ДИНАМИКА ТОЧКИ НАМАТЫВАНИЯ ТЕКСТИЛЬНОЙ ПАКОВКИ РУЛОННОГО ТИПА

А. Ю. КУТЬИН, Ю. К. КУТЬИН, Ю.А. КОСИНОВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

Проблема определения параметров напряженного состояния тела намотки тесно связана с задачей грамотного проектирования технологического оборудования, обеспечивающего формирование паковок с заданными свойствами, именно поэтому ее решению посвящено много исследований [1]. Но результаты, полученные в них, можно расценивать только как источник качественной информации о процессах, происходящих в паковке. Достигнутые результаты, в силу случайного характера процесса наматывания [2], нельзя соотнести с конкретной паковкой. Сегодня необходим новый подход к решению данной проблемы.

Для превращения случайного процесса формирования цилиндрической намотки в детерминированный разработан и реализован способ активного (управляемого) перемещения уплотняющего органа в соответствии с математической моделью [2], [3], состоящей из четырех уравнений:

$$a = f(\theta)\ , \tag{1}$$

$$\rho(\theta) - \rho_0 = \int_0^\theta a d\theta\,, \tag{2}$$

$$L = \int_0^\theta \rho(\theta)\, d\theta\,, \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{m_S L(\theta)}{\pi H[\rho^2 - \rho_0^2]}\,, \tag{4}$$

где a – параметр спирали намотки [4]; ρ – текущий радиус намотки; θ – угол поворота паковки; ρ_0 - радиус основания паковки; L – текущая длина намотки; m_s – масса единицы длины полотна перерабатываемого материала; H – ширина полотна; γ – плотность намотки.

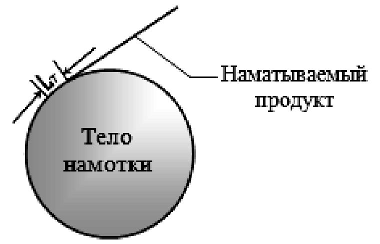

Рис. 1

Второе уравнение этой модели описывает движение точки наматывания материала (рис. 1) по спирали. В соответствии с законами динамики для точки, двигающейся по известной траектории, можно определить величину силы, действующей на нее. Причем следует отметить, что масса точки наматывания $m_н$ – величина переменная. По мере вращения паковки она возрастает согласно некоторой функции ξ(θ):

$$m_н = \xi(\theta)\,, \tag{5}$$

поскольку увеличивается площадь соприкосновения материала с телом намотки.

Совокупная масса точек наматывания должна быть равной массе всей намотки, поэтому справедливо:

$$\sum m_н = m_S L_c\,, \tag{6}$$

где L_c – полная длина намотки.

Пусть известна величина $\Omega_н(\theta)$, характеризующая изменение массы точки наматывания в каждом месте ее траектории на участке $[0\,;\theta_к]$ в зависимости от угла поворота паковки. Тогда выражение (6) можно представить в виде:

$$\sum \Omega_н(\theta)\Delta\theta = m_S L_c, \qquad (7)$$

где $\theta_к$ – конечный угол поворота паковки; $\Delta\theta$ – приращение угла поворота паковки при соприкосновении наматываемого продукта с телом намотки.

В пределе при $\Delta\theta \to 0$ сумма (7) трансформируется в интегральную:

$$\int_0^{\theta_к} \Omega_н(\theta)d\theta = m_S L_c. \qquad (8)$$

Если в качестве формируемого объекта рассматривать сновальную паковку, то выражение (8) с учетом уравнения (3) можно записать в следующей форме:

$$\int_0^{\theta_к} \Omega_н(\theta)d\theta = MTL_c = MT\int_0^{\theta_к} \rho(\theta)\,d\theta\,, \qquad (9)$$

где M – число нитей в заправке; T – линейная плотность пряжи.

При использовании в качестве верхнего предела интегрирования θ $(0 < \theta \le \theta_к)$, выражение (9) отражает зависимость массы намотки от значения угла поворота θ. Из равенства (9) вытекает, что

$$\Omega_н = MT\rho(\theta),$$
$$m_н = MT\rho(\theta)d\theta = MTdL. \qquad (10)$$

Последняя формула подчеркивает исходное представление о том, что масса точки наматывания меняется в процессе формирования намотки, но движение точки с переменной массой подчиняется обобщенному уравнению динамики (уравнению Мещерского):

$$m_н\frac{dv}{dt} = F + \frac{dm_1}{dt}(u_1 - v) + \frac{dm_2}{dt}(u_2 - v)\,, \qquad (11)$$

где $m_н = m_н(t)$ – масса точки наматывания в текущий момент времени t (координаты точки отнесены к некоторой неподвижной системе координат); F – равнодействующая всех сил, действующих на точку наматывания; v – скорость точки в момент t; dm_1 и dm_2 – частицы массы, которые соответственно отделяются и присоединяются к точке наматывания за время dt; u_1 и u_2 – скорости частиц dm_1 и dm_2.

В данном уравнении разности скоростей $(u_1 - v) = v_1$ и $(u_2 - v) = v_2$ представляют собой относительные скорости отделяющихся и присоединяющихся частиц. $\frac{dm_1}{dt}v_1$ – это реактивная сила, обусловленная отделением частиц массы, а $\frac{dm_2}{dt}v_2$ – это тормозящая сила, обусловленная присоединением частиц массы.

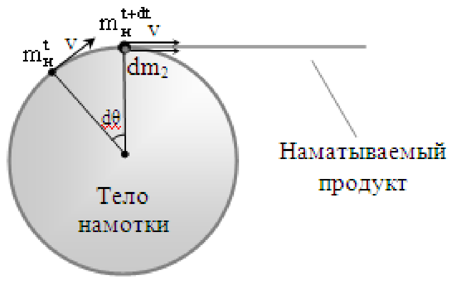

Рис. 2

Масса точки наматывания только возрастает, так как возрастает радиус намотки, а значит, и приращение дуги спирали. Следовательно, реактивная сила $\frac{dm_1}{dt}v_1$ отсутствует. Кроме того, по условиям задачи скорости точек $m_н$ (рис. 2 – движение точки наматывания; $m_н^t$ – положение точки наматывания $m_н$ в момент времени t; $m_н^{t+dt}$ – положение точки наматывания в момент времени $t + dt$) и dm_2 равны по абсолютному значению и совпадают по направлению ($u_2 = v$), поэтому $\frac{dm_2}{dt} v_2 = 0$.

В итоге уравнение (11) можно записать в обычном виде:

$$m_н \frac{dv}{dt} = F. \qquad (12)$$

Выясним природу силы F. Прежде всего, следует отметить, что это центральная сила, поскольку под ее действием точка наматывания описывает траекторию в виде спирали [5]. Следующий вопрос: какая эта сила (отталкивания или притяжения)? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно найти проекцию силы F_r на радиальное направление. Проекция силы F_r равна произведению массы точки $m_н$ на радиальную составляющую ускорения y_r:

$$F_r = m_н y_r. \qquad (13)$$

Радиальная составляющая ускорения в полярных координатах равна [5]:

$$y_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \qquad (14)$$

где $\ddot{\rho}$ – обозначение второй производной функции радиуса $\rho(t)$ по времени t; $\dot{\theta}$ – обозначение производной функции угла поворота паковки $\theta(t)$ по времени t. Такие обозначения приняты в теоретической механике. Воспользуемся ими, чтобы не нарушать установившуюся традицию.

В качестве уравнения траектории точки наматывания, заданного в полярных координатах, рассмотрим спираль Архимеда:

$$\rho - \rho_0 = a\theta, \qquad (15)$$

где a = const.

Секторная скорость при действии центральной силы – это величина постоянная [5]:

$$\frac{\rho^2\dot{\theta}}{2} = \text{const}. \qquad (16)$$

Удвоенная секторная скорость тоже константа:

$$\rho^2\dot{\theta} = C_E = \text{const}, \quad \dot{\theta} = \frac{C_E}{\rho^2}. \qquad (17)$$

Продифференцировав уравнение траектории последовательно два раза, получим:

$$\dot{\rho} = a\dot{\theta} = \frac{aC_E}{\rho^2}, \qquad (18);$$

$$\ddot{\rho} = -2\frac{a^2C_E^2}{\rho^5}. \qquad (19)$$

Если подставить выражения (17) и (19) в формулу (14) для радиальной составляющей ускорения, то последняя приобретет следующий вид:

$$y_r = -\frac{C_E^2(2a^2 + \rho^2)}{\rho^5}. \qquad (20)$$

Параметр a спирали – это очень маленькая величина (в единицах СИ имеет порядок $10^{-5}...10^{-6}$), поэтому ее квадратом можно пренебречь. В итоге получится:

$$y_r = -\frac{C_E^2}{\rho^3} = -\rho\dot{\theta}^2. \qquad (21)$$

Поскольку линейная скорость $\nu_л$ наматываемого материала постоянна, то радиальная составляющая ускорения будет равна:

$$y_r = -\frac{\nu_л^2}{\rho}. \qquad (22)$$

Соответственно проекция центральной силы на радиальное направление будет следующей:

$$F_г = -m_н \frac{v_л^2}{\rho}. \qquad (23)$$

В данном случае знак минус свидетельствует только о том, что центральная сила F является силой притяжения, и ее проекция $F_г$ направлена к центру паковки [5].

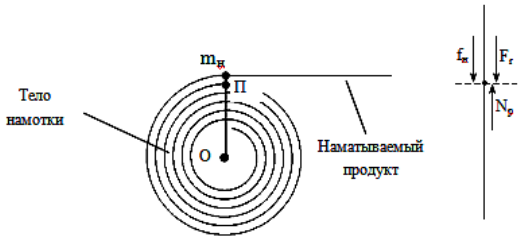

Рис. 3

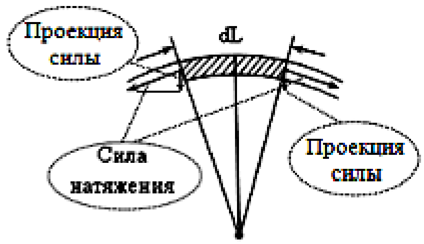

Рис. 4

Теперь рассмотрим динамику системы материальных точек $m_н$ и П (рис. 3). В радиальном направлении на точку П действует центростремительная сила $F_г$, а также проекция $f_н$ силы натяжения – силы, которая вызывает деформацию самого наматываемого продукта на участке $L_т$ в месте его соприкосновения с телом намотки (рис. 1) и (рис. 4 – проекция силы натяжения в радиальном направлении), то есть в точке наматывания.

Кроме того, на точку П со стороны тела намотки действует сила реакции $N_р$, а также, в соответствии с принципом Даламбера [6], сила инерции $m_п y_п$ ($m_п$ – масса точки П; $y_п$ – ускорение точки П), направленная в сторону, противоположную направлению ускорения $y_п$.

Запишем уравнение кинетостатики для точки П в проекции на радиальное направление [5]:

$$F_г + f_н - N_р - m_п y_п = 0. \qquad (24)$$

В первом приближении будем считать, что точка П остается неподвижной, поэтому ее ускорение $y_п$ равно нулю. Тогда силу реакции можно представить в виде суммы двух сил:

$$N_р = F_г + f_н. \qquad (25)$$

В соответствии с третьим законом динамики сила реакции $N_р$ равна по модулю силе давления $C_п$, действующей со стороны точки П на тело намотки и направленной в противоположную сторону:

$$C_п = F_г + f_н = m_н \frac{v_л^2}{\rho} + f_н. \qquad (26)$$

Соотношение сил $F_г$ и $f_н$ зависит от линейной скорости наматываемого материала и от вида применяемой для формирования намотки математической модели. Дальнейшие исследования необходимо сосредоточить на поиске таких условий наматывания и такой математической модели, при которых материал в теле намотки подвергается наименьшей деформации.

ВЫВОДЫ

На основе принципов динамики с помощью известной траектории движения точки наматывания длинномерного материала выявлена взаимосвязь между условиями этого движения и действующей на выделенный элемент намотки совокупной силой, зависящей от математической модели формирования паковки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сухарев В.А., Матюшев И.И.* Расчет тел намотки. – М.: Машиностроение, 1982.

2. *Кутьин А.Ю.* Проектирование текстильных паковок рулонного типа и методы их воспроизводства. – Иваново: ИГТА, 2006.

3. *Кутьин А.Ю., Кутьин Ю.К., Паникратов С.К.* // Текстильная промышленность. – 1996, № 3. С.25…27.

4. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике.– М.: Физматгиз, 1961.

5. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Учебное пособие для втузов. – Т. II. Динамика. – М.: Наука, 1991.

6. *Карякин Н.И., Быстров К.Н., Киреев П.С.* Краткий справочник по физике: Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1964.

Рекомендована кафедрой прикладной математики и информационных технологий. Поступила 29.01.08.