

УДК 677.11

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛОКОН И НИТЕЙ\***

*М.В. КИСЕЛЕВ, Р.В. КОРАБЕЛЬНИКОВ*

(Костромской государственный технологический университет)

Линейную вязкоупругость для одномерного объекта удобно трактовать при помощи механических моделей, которые наглядно демонстрируют поведение различных вязкоупругих материалов. Данному вопросу посвящено большое количество работ, где подробно описаны механические модели и соответствующие им уравнения для определения напряженно-деформированного состояния [1]. В широко известных моделях Максвелла, Фойгта, Кельвина и других сделано допущение о постоянстве физико-механических характеристик волокон или нитей на всей протяженности их длины. Такое допущение приводит к существенным погрешностям при решении реальных задач. По данным [2] механические свойства химических волокон при одних и тех же условиях испытаний отличаются до 2,5 раз, для натуральных волокон до – 10 и более раз. Данный факт объясняется вероятностным характером расположения макромолекул в полимере, влиянием погодных условий на рост натуральных волокон, особенностей технологических процессов их переработки и др. Данное обстоятельство привело исследователей к выводу о рассмотрении волокон и нитей как совокупности отдельных ее участков, обладаю-

щих различными физико-механическими характеристиками [3].

В данной работе рассмотрен конечно-элементный подход для описания поведения волокон и нитей с произвольными вероятностными механическими характеристиками по длине. Изучение законов распределения механических и геометрических характеристик исследуемого объекта в данной работе не рассматривалось в связи с тем, что оно является самостоятельной задачей. Предложен алгоритм определения матриц жесткости конечных элементов – аналогов механическим моделям произвольной сложности. Задача в общем виде формулируется так: составить аналитическое выражение матрицы жесткости нити, имеющей длину  $L$  и  $N$  участков длиной  $l$  (рис. 1 – нить и ее конечно-элементное представление). Каждый из участков имеет свои физико-механические характеристики и поведение материала описывается различными механическими моделями.

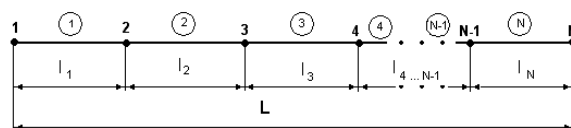
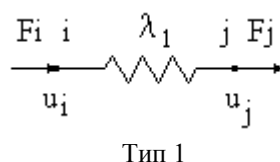


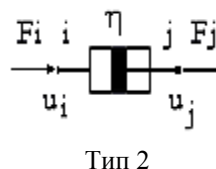
Рис. 1

\* Работа выполнена под руководством проф., докт. техн. наук Р.В. Корабельникова.

Из рассмотрения механических моделей вязкоупругого материала видно, что для его описания при нагружении необходимо использовать два или более элементов, имитирующих упругие и вязкие свойства. Поэтому логично предположить описывать механические свойства подобных материалов с помощью комбинации



Тип 1



Тип 2

Рис. 2

Для элемента тип 1. Жесткость элемента характеризуется величиной  $\lambda_1$ . Таким образом, зависимость силы от деформации запишется как:

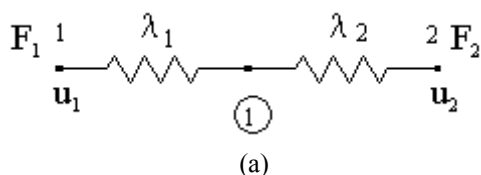
$$F_i = \lambda_1 \cdot \delta,$$

где  $\delta = u_j - u_i$ .

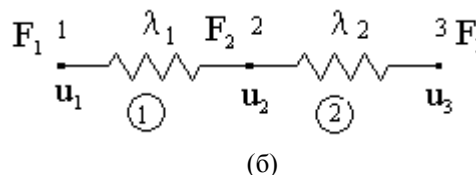
Рассмотрим силы, действующие в узлах данного элемента:

$$\text{В узле } i: F_i = \lambda_1 \cdot (u_i - u_j).$$

$$\text{В узле } j: F_j = \lambda_1 \cdot (u_j - u_i).$$



(а)



(б)

Рис. 3

Используя алгоритм прямого формирования глобальной матрицы жесткости [4], коэффициенты матрицы жесткости конечного элемента 1 на рис. 3-а имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \lambda & (-\lambda) \\ (-\lambda) & \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \lambda = \frac{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

конечных элементов с аналогичными свойствами.

Построим конечно-элементное решение вышеприведенных моделей с выводом матрицы жесткости комбинированного конечного элемента, состоящего из конечных элементов двух типов (рис. 2):

Или в матричной форме для элемента тип 1 и тип 2 соответственно:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & (-\lambda)_1 \\ (-\lambda)_1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i \\ F_j \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \eta & -\eta \\ -\eta & \eta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i \\ F_j \end{pmatrix}.$$

Выведем матрицу жесткости для конструкции с параллельным соединением двух упругих элементов (рис. 3 – конструкция из одного упругого элемента (а) и ее аналог из двух элементов (б), соединенных последовательно).

Аналогично выводится матрица жесткости для конструкции с параллельным соединением 2-х упругих элементов:

$$\begin{bmatrix} \lambda & (-\lambda) \\ (-\lambda) & \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

где  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .

Полученные данные согласуются с физической аналогией – определение сум-

марной емкости конденсаторов при последовательном и параллельном их соединении.

Используя полученные соотношения, составим алгоритм получения сколь угодно сложной механической модели, описывающей свойства волокон и нитей (рис. 4 – блок-схема определения коэффициентов матрицы жесткости комбинированного конечного элемента для произвольной механической модели поведения материала волокон и нитей).

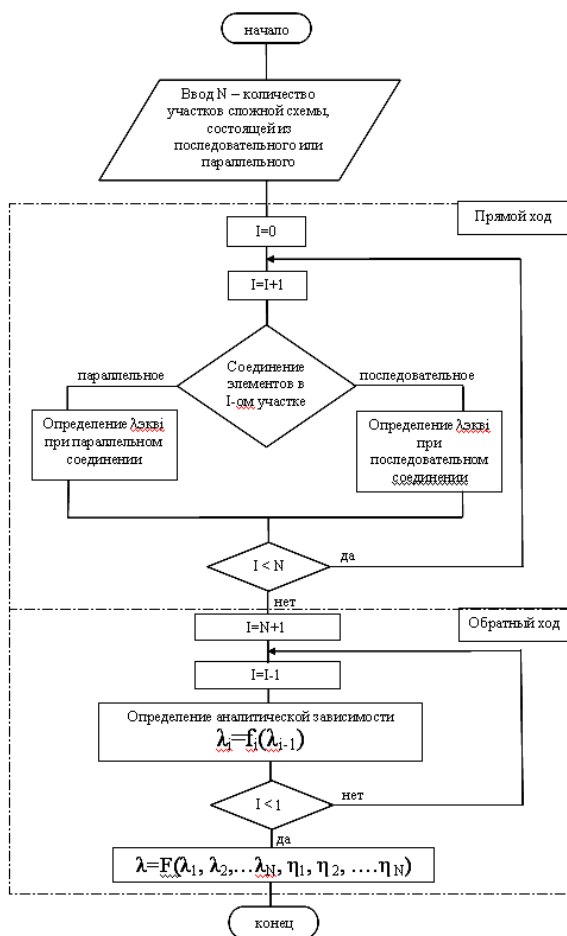


Рис. 4

Используя алгоритм прямого формирования глобальной матрицы жесткости, составляется основное разрешающее уравнение метода конечных элементов для нити, представленной на рис. 1.

## ВЫВОДЫ

1. Для практических расчетов волокон и нитей с учетом их различных физико-механических характеристик по длине эффективен метод конечных элементов.

2. Предложенный в работе алгоритм позволяет вычислить матрицу жесткости комбинированного конечного элемента, эквивалентного по своим свойствам произвольной механической модели поведения материала при одноосной нагрузке.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мигушов И.И. Механика текстильной нити и ткани. – М.: Легкая индустрия, 1980.
2. Перепелкин К.Е. Структура и свойства волокон. – М.: Химия, 1985.
3. Проталинский С.Е. Развитие теории и вопросы приложения механики нити к задачам текстильной технологии: Дис.... докт. техн. наук. – Кострома, 1999.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979.

Рекомендована кафедрой теории механизмов и машин и проектирования текстильных машин. Поступила 01.02.08.