УДК (677.024.1:677.017.35).681.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПОСТАВОК РУЛОННОГО СЫРЬЯ. БАЗИСЫ ПЛАНОВ

В.В. КЛЕЙНОСОВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Предприятие планирует улучшить свою материально-техническую базу, а вместе с тем и материальное благосостояние, открывая производство комплектующих изделий – плоских лекал различной геометрической формы из сырья – рулонов подходящей ширины.

Техническая база предприятия обладает возможностями производить комплектующие любой геометрической формы, однако маркетинговая группа (ЛПР) постоянно следит за наиболее модными товарами и каждый раз рекомендует производство комплектующих именно этих, пользующихся спросом товаров.

В этих условиях, когда мода может довольно быстро изменяться, а на рынке сырья могут появляться или нет рулоны необходимой ширины H, планирование производства сводится всякий раз к незамедлительному выполнению поступившего к текущему моменту разового заказа.

Выбор всякий раз "модных" на данный момент комплектующих; расчет необходимого количества сырья L(H) для выполнения каждого заказа этих комплектующих, раскладка лекал на рулон известной к данному моменту ширины H и, наконец, раскрой лекал полученной укладки (техника раскроя здесь не рассматривается) являются содержанием очень важной задачи, от эффективного выполнения которой зависит успешная деятельность предприятия. Эту задачу можно сформулировать так.

Для любого предложенного заказа в виде m-мерного вектора $B = (b_1, b_2, \dots b_m)$ нужно уметь в кратчайший срок определять длину L(H) при заданном H. Ввиду того, что в цепи заказов, размерность вектора B = m, значения координат $b_i (i = \overline{1, m})$ и величина H – переменные величины, невозможно получение априори какой-либо аналитической оценки L(H). Отсюда – ускоренное моделирование процесса укладки лекал для получения оценки L(H) в результате проведения опыта.

Для больших планов ($\|B\| = \sum_{i=1}^{m} b_i$ – большое число) составить модель раскладки лекал на компьютере не представляется возможным ввиду ограниченности размеров экрана (при ограниченном экране увеличение $\|B\|$ влечет за собой уменьшение H). В раскройном цехе, несмотря на то, что ищется какое-нибудь допустимое, с точки зрения ЛПР, значение L(H) (а не, $L_{min}(H)$, например,) время на его отыскание может превзойти разумные допустимые пределы.

Для предприятий с хорошим техническим оснащением (достаточно много компьютеров или большая площадь раскройных цехов) задачу можно разбить на части, разбивая на части величину $\|B\|$ и моделируя одновременно раскладки этих частей (лекал) на компьютерах или на раскройных столах. (В дальнейшем компьютер или раскройный стол – техническая единица (т.е.)).

Делая вполне естественное для изотропных материалов предположение, - время укладки лекал на рулон в основном зависит от количества укладываемых лекал и в меньшей степени зависит от размеров и форм этих лекал, можно попытаться разбить количество всех лекал $\|B\|$ на расчетное количество r требуемых (т.е.), так чтобы почти одновременно закончить работу по укладке и определению для конкретного H величин $L_1, L_2, \ldots L_r$, составляющих искомую длину L рулона.

Из теории чисел [1] известно, что любое натуральное X представимо в виде $X = r\Delta x + \xi$, где натуральное ξ – остаток от деления X на r $(\xi < \Delta x)$. (В математическом анализе есть аналогичное выражение для приращения функции $\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x)$).

В обоих этих выражениях содержится главная часть $r\Delta x$ $(A\Delta x)$ и остаток ξ $(0(\Delta x))$. (Во втором выражении $0(\Delta x)$ считается остатком для таких действительных Δx, для которых выполнено условие $0(\Delta x) < \Delta x$).

Числовым базисом для натурального числа X будем считать произведение натуральных чисел r и Δx, а Δx – базисным элементом (частью) этого базиса. (В произведении $r\Delta x$ при условии $r < \xi$ базисным элементом можно считать с тем же правом и величину r. Тогда Δx – частота использования базисного элемента r.)

Эти предложения возникают из достаточно общего (философского) определения базиса – частицы любого целого, многократное (больше двух) повторение которых в основном воспроизводит это целое. С некоторым дополнением это определение может быть перенесено с чисел на векторы.

Знание полного набора базисных элементов позволяет ставить оптимизационные задачи на глобальный экстремум.

Для принятия правильного решения маркетинговой группе (ЛПР) необходимо знать полную группу всех значений Δx, удовлетворяющих равенству $X = r\Delta x + \xi$, $(\xi < \Delta x)$, которая поможет проанализировать финансовые возможности предприятия и оптимально ими распорядиться.

Как только выбрана величина Δx и соответствующее ему количество (т.е.) r, следует произвольно разделить все лекала вектора B на части, каждая из которых содержит Δx лекал и, в случае изотропного материала, одновременно начать укладку этих лекал на определенном для них компьютере. (Предполагается, что размеры экрана компьютера позволяют замоделировать величину H и уложить на экране Δx назначенных ему лекал так, чтобы площадь HL_i уместилась на каждом из i (i=1, 2, … r) экранов (L_i – длина i-го куска рулона ширины H, вместившего в себя Δx своих лекал) (ширина рулона может по-разному масштабироваться на экранах разных компьютеров)).

Описанный выше план не проходит для анизотропных материалов. Дело в том, что анизотропный материал вообще нельзя разбивать на части, так как не известно, какого типа запреты попадут в каждую из этих частей, как там разместятся и можно ли определенными для каждого компьютера лекалами покрывать каждую такую часть.

Особо следует подчеркнуть, что даже для изотропного материала недопустимо разбивать рулон на прямоугольники, а затем заполнять его лекалами. Необходимо вначале определить типы лекал и их количество для каждого компьютера, а затем, моделируя раскладку лекал на рулон ширины H? определять на модели величину L_i – расходуемой длины рулона.

Иллюстрацию этого принципа рассмотрим на простейшем примере. Для укладки двух произвольных лекал предложен кусок рулона шириной H и длиной L с уверенностью достаточности предложенных размеров для проведения укладки. Было решено убыстрить процесс, укладывая по одному лекалу одновременно на предложенную для этой цели часть куска рулона. Были предложены альтернативы разбиения куска (H, L) на две части: $(H, \frac{L}{n})$ и $(H, \frac{n-1}{n}L)$ $(n = 2,3,4 \ldots)$. Когда выяснилось, что лекала – два треугольника с катетами H и L, пришлось признать оба куска отходами.

По этой причине постановку задачи раскроя ткани, рассмотренную в [2], можно скорее всего, отнести к классу некорректных. Рассмотрим ее.

Каждые 100 $м^2$ ткани (о форме ничего не говорится) при j-м способе раскроя могут дать b_{ij} деталей i-го вида $(i = \overline{1, m})$ при $c_j м^2$ отходов.

Требуется выполнить план $B = (b_1, b_2, \dots b_m)^T$, $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = b_i$, при минимуме отходов $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, (j=1,2,…n), $x_j \geq 0$ – частота использования j-го вида раскроя.

Переход от x_j дробных к целым в корне меняет природу задачи. Дробные решения $(x_1, x_2, \dots x_n)$ существуют, если векторы $b_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots b_{mj})$ с натуральными b_{ij} линейно-независимы (при формировании вариантов раскроя это не учитывается), причем при m=n оптимизационная задача вырождается (получается единственное решение), а при n>m (с ростом) n появляются возможности получения более "глубокого" оптимума.

Целые неотрицательные x_j $(j = 1,2, \dots n)$ непрерывное линейное многообразие $\sum_{j=1}^{n} b_i x_j$ превращают в набор изолированных точек – целочисленную оболочку пространства, не совпадающую со всем пространством целочисленных векторов.

Увеличение размерности вектора уменьшает плотность насыщения элементами оболочки соответствующего пространства.

Например, число "один" на числовой оси, умноженное на целое положительное k, воспроизводит все натуральные числа единственным образом, в то время как двухмерный вектор, состоящий из единиц (1,1), воспроизводит только $\rho[k(1,1)] = = \frac{k}{(2k+1)(k+1)-1}$ – часть точек с целым неотрицательными координатами первой четверти декартовой системы координат. Величина $\rho[k(1,1)]$ – плотность покрытия линейной целочисленной оболочкой первого квадранта неотрицательных целых чисел $(k = 1,2,3 \dots)$ $(\rho[0(1,1)] = 0)$ с ростом k стремится к нулю, то есть $\lim_{k \to \infty} \rho[k(1,1)] = 0$ (рис. 1), то есть этот вектор не способен описать все целочисленные неотрицательные точки первого квадранта.

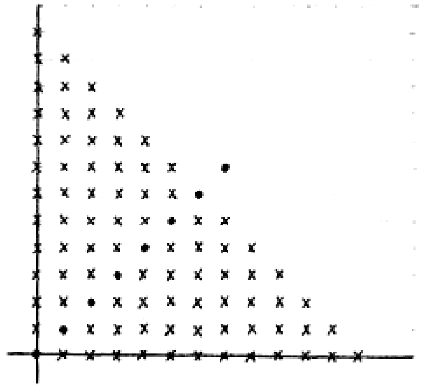

Рис. 1

С другой стороны, линейная комбинация $k_1(0,1) + k_2(1,0)$ векторов (0,1) и (1,0) при $k = k_1 + k_2 \to \infty$ описывает буквально все целочисленные неотрицательные точки первой четверти. (Свойство это обобщается на n-мерный случай для $k_1(1,0, \dots 0) + +k_2(0,1, \dots 0) + k_n(0,0, \dots 1)$, $\sum_{i=1}^{n} k_i = k \to \infty$).

Указанное свойство покрывать все неотрицательные целые числа набором единичных векторов m-мерного Евклидова пространства не противоречит указанному в [3] необходимому и достаточному условию существования целых решений у системы Ax=b – унимодулярности базиса для крайних точек, так как определитель, составленный из единичных векторов, равен 1 или -1. (Под базисом матрицы A в [3] понимается квадратная подматрица размером $m \times m$, определитель которой равен 1 или -1).

Строя на плоскости рисунки, аналогичные рис.1, можно показать, что $\lim_{k \to \infty} \rho[k_1(1,2) + k_2(2,1)] = \frac{1}{3}$, а $\lim_{k \to \infty} \rho[k_1(2,3) + k_2(3,2)] = \frac{1}{5}$ k_1 и k_2 – целые неотрицательные числа такие, что $k_1 + k_2 = k$. (Здесь плотности найдены для зауженных углов).

Докажем первое утверждение (рис.2). Пересечем угол АОВ прямой k=const. Количество точек в оболочке внутри угла будет (k+1)(k+2) – сумма натуральных чисел от 1 до k+1, количество неохваченных точек угла будет 1+2+…k и 1+2+…k-1, то есть $k(k+1)+k(k-1)=2k^2$ всех точек внутри угла будет $k^2+3k+2+2k^2=3k^2+3k+2$.

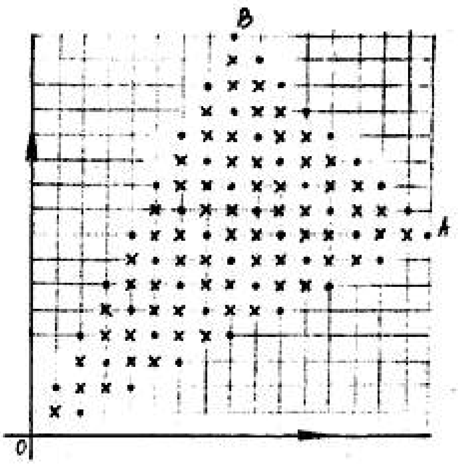

Рис. 2

Отсюда $\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+3k+2}{3k^2+3k+2}=\frac{1}{3}$.

Ввиду отсутствия геометрической интерпретации оценки плотности для векторов большей размерности затруднены.

Поиск полной системы базовых векторов, образующих целочисленную оболочку, стесненных некоторыми технико-экономическими ограничениями (количество векторов, их размерность, числовые значения координат и др.), с целью достижения оптимальным образом некоторой интересующей исследователя "области" пространства является сутью целочисленного программирования.

В поставленной выше задаче раскроя куски материала в целях минимизации отходов максимально нагружаются (базисные векторы больших размерностей и с большими числами, что явно не сопутствует появлению свойств унимодулярности у базиса матрицы А).

По-видимому, это одна из причин несогласованности теории с практикой, по которой А.Схрейвер [4] во введении пишет: "…решение ЦЛП задачи современными методами очень трудно и требует много времени. Большие задачи целочисленного линейного программирования практически не разрешимы".

В тех редких случаях, когда удается решить задачу раскроя, практическое использование ее результатов в дальнейшем проблематично. Малейшее изменение формы, содержащей 100 $м^2$, не позволит получить такие же векторы матрицы и задачу придется решать заново. Это может не пройти и для более устоявшейся формы – прямоугольника, например, заменяя прямоугольник с размерами (10, 10) на – (12,5, 8). Переход от 100 $м^2$ к рулону шириной Н является одним из направлений стандартизации исходных данных задач раскроя. Однако при постановке задачи на глобальный экстремум нам приходится сталкиваться со сложнейшей проблемой выбора всех базисных векторов A_j матрицы В в матричном уравнении $Ax=B$, обеспечивающих целочисленное решение задачи при любом векторе В с натуральными коэффициентами.

Возвращаясь к поставленной выше задаче оптимального выбора количества r технических единиц для измерения необходимой длины рулона, заметим, что ее решение связано с перечислением всех ее базисных значений $\Delta\|B\|$, связанных с r уравнением $\|B\|=\Delta\|B\|r+\xi$ и соответствующих им значений r. Получающееся множество Парето получают в виде таблицы, прогоняя значения $\Delta\|B\|$ от 1 до $\frac{\|B\|}{2}$, для заданного $\|B\|$.

Табл. 1 имеет вид:

Таблица 1

$\|B\|$	$\Delta\|B\|$	r	ξ
…	…	…	…

Таблица может получиться большой, но не обязательно следует выписывать все ее значения.

Таблица открывает возможности перед маркетинговой группой (ЛПР): перспективы работы предприятия и возможность выбирать оптимальные варианты методом принятия решения в зависимости от массы случайностей рынка.

Очевидно, количество технических единиц должно минимизироваться. Количество лекал, выбранных для каждой технической единицы, должно оптимизироваться: с ужесточением требований на межлекальные отходы при больших $\Delta\|B\|$ процесс отыскания ΔL длины рулона может неоправданно затянуться, приводя производство к большим издержкам.

Предстоит решить, какими лекалами наполнять каждый раз величины $\Delta\|B\|$, учитывая свойство материала рулона и конфигурации лекал. Здесь без компетентных представителей по материаловедению не обойтись.

И, наконец, необходимо распределить по техническим единицам остаточные образцы $(0\Delta\|B\|)$ таким образом, чтобы это не сильно повлияло на общее время определения длины ΔL рулона.

Для достаточно образованной в научно-производственном плане маркетинговой группы эта последовательность задач вполне по силам.

Сузить таблицу по выбору количества технических единиц для выполнения предстоящей работы могут помочь:

1) данные о наличии технических средств и об экономических возможностях их приобретения;

2) работа должна соответствовать календарным срокам планирования (полный день, месяц, квартал и т.д. …);

3) работа не должна превышать указанный срок (k дней).

Приведем пример получения укороченной таблицы.

Принят заказ на 291 изделие, который нужно выполнить не более чем за 4 дня. Одна техническая единица обрабатывает 17 изделий за смену (день). Составить альтернативный план выполнения всей работы:

– r технических единиц (т.е.) обрабатывает 17 r изделий за смену или 68 r изделий за 4 дня (смены). Число 68 r должно покрывать указанный 291 план.

Рассуждая так же, получим итоговую таблицу – табл. 2.

Таблица 2

4 дня	291=68r	r=4,279	68·4+19
3 дня	291=51r	r=5,7	255+36
2 дня	291=34r	r=8,55	272+19
1 день	291=17r	r=17,11	289+2

t (дни)	k количество (т.е.)	остаток
4	4	19
3	5	36
2	8	19
1	17	2

Таким образом, используя все исходные данные, получили фактически полное множество Парето по параметрам r и t.

С увеличением количества технических единиц r количество дней t убывает, и, наоборот, с увеличением количества дней t количество r технических единиц уменьшается, хотя желательно было бы уменьшение обеих величин. Приходится решать проблему остатков.

ВЫВОДЫ

При работе в режиме заказов предприятие всякий раз в кратчайший срок должно определять необходимое для выполнения заказа количество сырья.

Если заказ в лекалах разнообразной формы (шт.), а сырье – рулон, неизвестной ширины H, то моделируется процесс раскладки лекал с замером необходимой длины L, то есть L определяется опытным путем.

Большие планы разбиваются на такие равные части, чтобы каждая из частей могла бы быть замоделирована либо на компьютере, либо на рабочем столе (технической единице).

Обоснованием разбиения на равные части служит утверждение: время укладки лекал в основном зависит от количества укладываемых лекал и меньше – от формы и размеров.

Недопустимо моделировать размеры прямоугольников – частей рулона, заполняя его максимально лекалами плана, так как эту работу нельзя проводить параллельно по многим причинам.

Разбиение плана на равные части можно производить многими способами, но число их ограничено ввиду целочисленности задачи.

Сэкономить количество вариантов помогают данные о производительности технических единиц, ограничение на всю работу по времени, а также нормативы календарного планирования.

Производительность одной технической единицы (лек/ч, лек/смена), умноженная на длительность работы, примерно равна величине плана – есть величина постоянная, то есть с увеличением одной, другая падает.

Предприятию выгодно использовать меньше технических единиц и закончить работу в кратчайшее время, что в данном случае сделать невозможно. Тогда для ЛПР строится набор небольшого количества альтернативных вариантов, полученных простыми арифметическими действиями, для принятия окончательного компромиссного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. – М.,Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1952. С.8.

2. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. С. 8, 9.

3. *Саати Т.* Численные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы – М.: Мир, 1973.

4. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. – Т.2. – М.: Мир, 1991.

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 02.07.08.