УДК. 519.865.7/873

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БЛОЧНЫХ СТРУКТУР В ФОРМИРОВАНИИ СЫРЬЕВЫХ ПОТОКОВ РУЛОННОГО ТИПА

В.В. КЛЕЙНОСОВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

В работе [1] предложен геометрический подход получения "рабочего строительного материала" - безотходных или малоотходных блоков из рулонного материала, задаваемого одним числовым параметром H - шириной рулона. Величина H считается положительным целым, описывающим ширину рулона (длина рулона сколь угодна большая), принимающим произвольное (рыночное), но конкретно заданное значение. Блочные структуры – блоки образуются из более мелких частей - прямоугольников, наименьшей площади, описывающих заданное конкретное лекало (рис. 1).

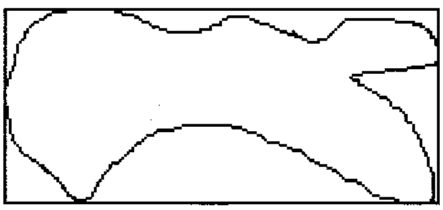


Рис. 1

Исходный прямоугольник сам содержит отходную часть (рис. 1) за исключением случая, когда лекало имеет форму прямоугольника $(a_i;b_i)$, $(a_i > b_i)$. Учет отходов исходных прямоугольников можно осуществить введя третью координату e(%) – полезно используемую площадь, которая легко считается методом равномерно отстоящих сечений [2]. Ортогональный метод получения блоков из частей связан с максимальным укрупнением каждой из частей до прямоугольника (блока), не имеющего внутренних "дырок" и один из параметров которого H* максимально приближается к заданному H (H≥H*).

С введением блоков математический аппарат решения различных задач экономического характера упрощается до применения только одной операции – повторения (умножения). Полную информацию о блоке можно получить в векторном виде, задаваясь пятью координатами вектора $V_Б$ = (H, H*, K, L, E), где H – ширина рулона; H* - используемая блоками ширина рулона; K – количество плотно уложенных в блоке "базовых" прямоугольников (a_i, b_i, c_i), образующих прямоугольник ширины H* минимальной длины (периода) L, E – эффективность укладки лекал (полезно используемая площадь блока) (рис.2).

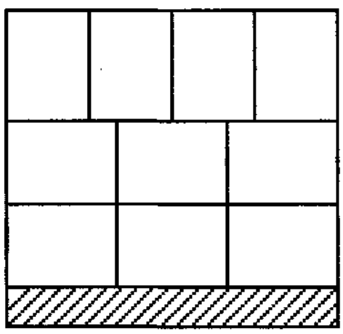


Рис. 2

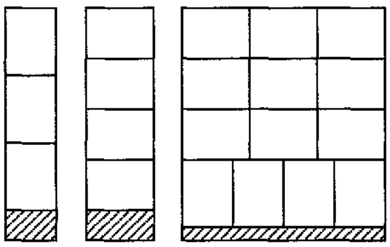
По заданным координатам вектора $V_0 = (a, b, e)$ могут быть определены все координаты вектора блока: H – дано, H* имеет вид am+bn (a, b - натуральные, m, n - натуральные, одно из них может быть нулем) и определяется из условия минимизации величины H-am-bn, L определяется формулой из [1]:

$$K = H^*L/(ab), \ E = (H^*/H)e. \quad (1).$$

Справедливо и обратное – по элементам вектора $V_Б$ можно найти все 3 координаты вектора V_0.

Примеры

а) Пусть $V_Б$ = (27, 24, 4, 8, 80). Так как H* = 24 делится нацело на K = 4, то согласно формуле (2) [1] пара L и 24/4 образуют пару и b вектора V_0, то есть V_0 = (8, 6, e). Неизвестную величину e можно вычислить из формулы (1): e = 9%. Итак, V_0 = (8, 6, 90). Как и следовало ожидать, e > E, так как в результате образования блока осталась неиспользованной площадь (H - H*)L= = 3·8 = 24 кв. ед.



а) б) в)

Рис. 3

б) Рассмотрим обратную задачу: можно ли получить координаты вектора $V_Б$ из V_0, используя другую геометрию укладок, и сколько таких векторов можно получить. На рис. 3-б, в представлены соответственно векторы $V_Б$ = (27, 24, 3, 6, 80), $V_Б$ = (27, 26, 13, 24, 86(6)), воспроизводимые одним и тем же вектором V_0 (8,6, 90). Заметим прежде всего, что, используя геометрию получения прямоугольников-блоков "без дырок" со свойством параллельности сторон прямоугольников и рулона, можно получить только три вида блоков, характеризуемых векторами $V_Б$(а), $V_Б$(б) и $V_Б$(в) и представленными на рис 3. Для постоянного, заданного H векторы $V_Б$(а), $V_Б$(б) и $V_Б$(в) являются базовыми при решении множества возникающих на практике задач расчетного или оптимизационного характера с критериями: K – количество лекал заданного вида, L – длина расходуемого материала (рулона), E – эффективность использования выделенного сырья. Характерными для планирования производства являются задачи: 1) расчет длины имеющегося на рынке рулона ширины H для выпуска лекал одного вида заданного замкнутой плоской кривой (без самопересечений) в количестве, равном $K_{зад}$ штук (можно и $K \geq K_{зад}$ для K, максимально близкому по условию задачи к $K_{зад}$); 2) то же что и в 1) при условии минимального расхода длины рулона; 3) то же что в 1) и 2) и расчетом E - эффективности использования сырья (рулона) под весь $K_{зад}$ план.

Нетрудно предположить, что без построения системы блоков, даже пользуясь мощными средствами вычислительной техники, легко заблудиться в лабиринте поиска нужных решений.

Проанализируем на конкретных примерах возможности использования блочных образований для отыскания решений в поставленных выше задачах. Линейную комбинацию укороченных блоков будем называть композицией блоков.

Если ширина H рулона уже выбрана и блоки (их не более трех) для заданного H и размеров лекала (a, b) уже построены, достаточную информацию для дальнейшей работы несет укороченный вектор (K, L, E) вместо (H, H*, K, L, E). Композицию блоков составит линейная их комбинация:

$$C_1 (K_1\ L_1\ E_1)^T + C_2 (K_2\ L_2\ E_2)^T + C_3 (K_3\ L_3\ E_3)^T = (K\ L\ E)^T,$$
$$K = C_1K_1 + C_2K_2 + C_3K_3 = \sum_{i=1}^{3} C_i K_i \text{, } L = \sum_{i=1}^{3} C_i K_i \text{, } E = (\sum_{i=1}^{3} C_i K_i)/L.$$

Композиция сохраняет свое название и в простейшем случае: из набора констант (C_1, C_2, C_3) какие-нибудь две равны нулю. Построим блоки для лекала (4,3) и H=10:

$$Б_1 = (2\ \ 3\ \ 80)^T\ \ Б_2 = (3\ \ 4\ \ 90)^T\ \ Б_1 = (10\ \ 12\ \ 100)^T.$$

Пусть $K_{зад}$ – планируемое количество лекал из рулона Н =10. Тогда для $K_{зад} = 4$ решением задачи будет $C_1 = 4/2 = 2$ и $R_4 =$ $= (4\ \ 6\ \ 80)$ - из рулона Н = 10, можно выкроить 4 лекала (4, 3) израсходовав 6 ед. длины рулона, с эффективностью 80%, дважды использовав блок $Б_1$. Для $K_{зад} = 6$: $C_1 = 6/2 = 3$, или $C_2 = 6/3 = 2$ результат $R_6 =$ $= (6\ \ 8\ \ 90)^T = 2Б_2$ более предпочтителен, чем $3Б_1 = (6\ \ 9\ \ 80)^T$ по второму и третьему показателям:

$$K_{зад} = 8,\ R_8 = 2Б_2 + Б_1 = (6\ \ 8\ \ 90)^T + (2\ \ 3\ \ 80)^T = (8\ \ 11\ \ 87{,}3)^T.$$

$$K_{зад} = 10, \text{ здесь либо } 10 = 2Б_1 + Б_2\ (C_1 = 2,\ C_2 = 2, \text{ либо } C_3 = 10.$$

$$2Б_2 + 2Б_1 = 2(Б_1 + Б_2) = (5\ \ 7\ \ 85)^T = (10\ \ 14\ \ 85)^T\ \ Б_3 = (10\ \ 12\ \ 100)^T$$

$$R_{10} = (10\ \ 12\ \ 100)^T..K_{зад} = 11.$$

Построив строчечные периодики для чисел 2 и 3**:**

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots & 2k & \\ 3 & & 6 & & 9 & \ldots & 3k & , \end{array}$$

легко усмотреть, что

$$R^*_{11} = 4Б_1 + Б_2 = (8\ \ 12\ \ 80)^T + (3\ \ 4\ \ 90)^T = (11\ \ 16\ \ 82{,}5)^T,$$

или

$$R^*_{11} = Б_1 + 3Б_2 = (2\ \ 3\ \ 80)^T + (9\ \ 12\ \ 90)^T = (11\ \ 15\ \ 88)^T.$$

Есть еще один вариант использования более плотного блока $Б_3$, но с повышением на единицу числа 11. Это вариант

$$R^*_{12} = Б_1 + Б_3 = (2\ \ 3\ \ 80)^T + (10\ \ 12\ \ 100)^T = (12\ \ 15\ \ 96)^T.$$

(знак (*) означает предположительное решение). Переходя от $R^*_{12} = (12\ \ 15\ \ 96)^T$ к $R^*_{11} = (11\ \ 15\ \ 88)^T$, видно, что в качестве решения нужно взять $R_{11} = (11\ \ 15\ \ 88)^T$.

Для больших значений $K_{зад}$ строятся строчечные периодики для всех чисел K_1, K_2 , K_3 и стрелками выделяются все соединения строчечных значений, сумма которых равна $K_{зад}$.

Изложенный алгоритм некоторым образом связан с решениями в целых положительных числах линейного диофантова уравнения относительно трех переменных: $C_1K_1 + C_2K_2 + C_3K_3$, а затем выбора минимального значения L_{min} из линейных комбинаций $L = C_1L_1 + C_2L_2 + C_3L_3$ при заданных $L_j = (j = 1, 2, 3)$ и полученных из приведенного выше уравнения значений C_1, C_2, C_3.

Подобного рода задача рассматривается в [3] под названием задачи о ранце: в ранце емкостью b надо упаковать n видов предметов с весами $C_1, C_2,\ldots, C_n$ и размерами $a_1,\ldots, a_n$ соответственно, так чтобы загрузка ранца была максимальной. Там рекомендуется упорядочить элементы по значимости: $C_1/a_1 \geq C_2/a_2 \geq\ldots\geq C_n/a_n$ и максимально нагружать в комбинации $x_1/a_1 +$ $+ x_2/a_2 +\ldots+ x_n/a_n \leq b$ сначала a_1, затем a_2 и т.д. Прием упорядочения по минимизируемой переменной L можно осуществить и в нашей задаче: 12/10 < 4/3 < 3/2 или 1,2 < 1, (3) < 1,5, поэтому самую минимальную длину рулона расходует блок 3 ($Б_3$), а затем $Б_2$ и наконец $Б_1$. В диофантовом уравнении переменные $K_i = (i = 1, 2, 3)$ по значимости распределятся так: $C_3 K_3 +$ $+ C_2K_2 + C_1K_1 = K_{зад}$..

Максимальное выделение главной координаты удобнее производить, имея "развертку" всех необходимых для решения задачи значений трех $К_3$, $К_2$, $К_1$ левой части уравнения:

$$\begin{array}{ccc} K_3 & K_2 & K_1 \\ 2K_3 & 2K_2 & 2K_1 \\ 3K_3 & 3K_2 & 3K_1 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Идею построения развертки в некотором смысле можно связать и идеей графического доказательства десятой теоремы Гильберта [3]: Найти алгоритм, при помощи которого можно после конечного числа операций определить, имеет ли данное диафантово уравнение целочисленное решение. Строя конечную систему узлов (ввиду конечности $К_{зад}$) первого, второго и третьего столбцов, а затем проводя конечное число всевозможных дуг, соединяющих узлы первого, второго и третьего столбцов, убеждаемся в том, что если вдоль какой-нибудь дуги $\Sigma_{i=1}^{3}$ $æ_i К_{зад}$, то диафантово уравнение имеет решение. $æ^i$ - одно из значений nK_i, i-го столбца (n - натуральное число).

Для $К_{зад} = 477$, используя блоки $Б_3 = (10\ \ 12\ \ 100)^T$ $Б_2 = (3\ \ 4\ \ 90)^T$ $Б_3 = (2\ \ 3\ \ 80)^T$ в порядке значимости получим решения (48, 0, 0) (47, 1, 2) (47, 3, 0) (47, 0, 8) и соответствующие им результаты $R^*_{480} = (480\ \ 576\ \ 100)^T \Rightarrow R^*_{477} = (477\ \ 576\ \ 0{,}99)^T \Rightarrow R^*_{477} = (470\ \ 564\ \ 100)^T + (3\ \ 4\ \ 90)^T + (4\ \ 6\ \ 80)^T = (477\ \ 574\ \ 99{,}7)^T \Rightarrow R^*_{479} = (470\ \ 564\ \ 100)^T + (9\ \ 12\ \ 90)^T = (479\ \ 576\ \ 99{,}8)^T \Rightarrow (477\ \ 576\ \ 78)^T$; $R^*_{478} = (470\ \ 564\ \ 100)^T$ $R^*_{478} = (470\ \ 564\ \ 100)^T + (8\ \ 12\ \ 80)^T = (478\ \ 576\ \ 98)^T \Rightarrow (477\ \ 576\ \ 84)^T$; $R^*_{477} = 47(10\ \ 12\ \ 100)^T + (3\ \ 4\ \ 90)^T + 2(2\ \ 3\ \ 80)^T = (477\ \ 574\ \ 99{,}7)^T$.

С появлением на рынке сырья различных параметров H_1, H_2, …, H_n появляется масса новых возможностей выполнить план заказа $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, в том числе удовлетворяя некоторому (нескольким) наперед заданным критериям. Здесь могут появляться новые задачи управления и оптимизации.

При упрощающих предположениях ортогональности (каждому рулону или его части отводится только один вид лекал) представляет интерес, например, задача оптимального распределения видов лекал видом рулонов, так чтобы суммарная длина израсходованного материала рулонов свелась бы к минимуму. Появляется возможность ставить и задачи календарного планирования по выполнению самого раскроя: одна раскройная машина выполняет один заказ (шт.),..m-я – m-й. Найти минимальный цикл одновременной работы двух машин. Труднодоступными для анализа являются задачи управления или оптимизации, сформулированные для смешанных подмножеств лекал, взятых из множества $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. Возрастающие возможности получить более плотную упаковку лекал в рулоне в этом случае наталкиваются на более серьезные трудности получения таких упаковок. Построение блока в этом случае является более сложной вычислительной задачей, разумеется, с использованием ЭВМ. Задача построения блока здесь формулируется в следующем виде:

Найти α_i максимилизирующие $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \le H$ (H - заданное целое число, $\alpha_i \ge 0$, целые) если $x_i = (a_i, b_i)$ $(i = 1, 2,\dots,m)$. (В ортогональном случае в $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ только одно из $\alpha_i \ne 0$, , остальные – нули), которые обеспечивали бы $\min\left(H - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) \ge 0$. Полную систему сумм $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ (базис) в этом случае выписать затруднительно, так как близость $\sum$ и H можно вводить поразному. Напомним, что в ортогональном случае в качестве базиса рассматриваются три вида сумм, которым соответствуют три вида блоков.

В заключение исследуем простейшую задачу, рассматриваемую во времени и относящуюся к классу задач календарного планирования, поставленную в работе [1]. Будем считать, что три (i = 3) режущих устройства работают одновременно по схеме малоотходных технологий а), б), в) рис. 3, вырезая лекала только одного вида из прямоугольников одного и того же размера (a, b). В этом случае время обработки каждого блока своим режущим инструментом можно считать почти пропорциональным количеству содержащихся в нем прямоугольников (a, b), то есть $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \ = 4:3:12$. (Напомним, что $K_1 : K_2 : K_3 = \ = 4:3:13$).

Действительно, время отрезания блоков от рулона и разрезание каждого блока на части (в данном случае (8,6)) пропорционально отношению

$$(27+4\cdot8):(27+18):(27+4\cdot24+2\cdot18+7{,}78)=59:45:183,$$

что в целых числах ближе к 4:3:12. Время æ, которое нужно израсходовать на вырезание лекал из прямоугольника, назовем единицей пропорциональности (рис. 1), æ – целое число (8 с, 15 мин, 2 ч, 3 дня, 1 декада и т.д.) Величина æ зависит от периметра прямоугольника 2a + 2b, описывающего данное лекало, степенью сложности контура лекала и скоростью $V(\tau)$ прохождения резца. (τ - текущее время [1]). Зависимость æ от величины 2a +2b можно исключить, если обратиться непосредственно к длине периметра лекала и скорости $V(\tau)$ его прохождения (здесь, по-видимому, не обойтись без вычисления криволинейных интегралов первого и второго рода аналитически заданных кривых).

Пусть теоретически или экспериментально уставлено для некоторой формы лекала и скорости резания æ=15 мин. Для обработки 1-го блока потребуется 15×4 = 60 мин. Для 2-г: - 15×3 = 45 мин, для третьего: 15×12 = 180 мин; за это время 1-й станок должен обработать 180:60 = 3 блока а), 2-й станок – 4 блока (б), а третий блок – всего 1. Вспоминая, что $L_1 = 8$, $L_2 = 6$, $L_3 = 24$, делаем вывод – для первого станка нужно подвести 3·8 = 24 лин. ед. рулона, для второго 6·4 = 24 л.ед., для третьего 1·24 л.ед. За 3 ч три станка выработают: 12+12+13 = 38 штук лекал.

ВЫВОДЫ

Пользуясь блочными представлениями лекал и записывая содержимое блоков в виде векторов, содержащих, количество лекал в блоке K, длину рулона, расходуемого под блок L, эффективность использования блока E и время обработки лекала æK, можно ставить и решать множество интересных задач по расчету, управлению и оптимизации рулонного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейносов В.В.* Геометрические предпосылки получения малоотходных технологий при разработке плановых нормативов в задачах, связанных с раскроем // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007, № 3С.

2. *Клейносов В.В.* Оптимизация укладки лекал на рулонном материале: Учебное пособие. – М.: МГАЛП, 1994.

3. *Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы / Пер. с англ. под ред. И.А. Ушакова. – М.: Мир, 1973.

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 02.07.08.