

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ФОРМЫ И ПОЛОЖЕНИЯ ВОЛОКОН В ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ

П.А. СЕВОСТЬЯНОВ, Т.В. СЕРЯКОВА

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Форма волокон в волокнистом материале является важнейшим фактором, определяющим его свойства. Для ее оценки используют либо отдельные характерные особенности: наличие и длину крючков, извитость, величину миграции по сечениям продукта, показатели крутки, либо искусственные характеристики, например, параметры эллипса с фокусами в концах волокна [1]. Очевидно, что получение оценки по реальным образцам волокон или их изображениям является весьма трудоемкой работой даже при ее автоматизации. Компьютерное моделирование волокнистых материалов в ряде задач требует имитации формы волокна и оценки изменений этой формы при определенных воздействиях на материал. Поэтому проблема выбора критериев формы волокна в таких задачах также актуальна. В отличие от реальных волокон, при моделировании форма волокна имитируется компьютером по выбранному алгоритму, и координаты точек волокна известны. Остается лишь выбрать подходящий критерий, достаточно наглядный, физически осмысленный и не требующий больших затрат времени на вычисление. Ниже приведены предлагаемые критерии и дается оценка их чувствительности к изменениям формы волокна и статистической устойчивости, а также критерии взаимного расположения двух волокон.

Критерии формы должны учитывать как степень отклонения разных участков волокна от его геометрического центра, так и направление этих отклонений. Поэтому естественной, на наш взгляд, характеристикой может быть тензор J , который в механике называется тензором моментов

инерции, а в многомерной статистике – ковариационной матрицей. Если $r(k)$, $k = 1, \dots, n$ – радиусы-векторы n реперных точек волокна, то элементы J вычисляются по формулам:







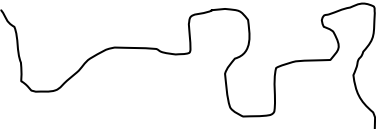
$$J_{rc} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (r_r(k) - r_{rc})(r_c(k) - r_{cc}), \quad (1)$$

где $r_{rc} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_r(k)$, $r, c = 1, 2, 3$.

Здесь индексы r, c нумеруют декартовы координаты, а вектор $r_c = (r_{rc})$ является геометрическим центром в олокна. Тензор $J = \|J_{rc}\|$ – симметричная, положительно определенная матрица [2]. Поэтому квадратичная форма на его основе соответствует эллипсоиду. Собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ этой матрицы – действительные неотрицательные числа, определяющие величины главных полуосей эллипсоида, то есть его протяженность вдоль этих осей. Поэтому в качестве показателей формы волокна предлагается использовать эти числа, а также инварианты на их основе. Разумеется, такие показатели не учитывают различные детали формы волокна, но некоторые основные характеристики, такие как протяженность вдоль осей координат, округлость формы, наличие крючков, и др. – влияют на их величину.

В табл.1 приведены некоторые регулярные формы волокна (прямая, окружность, полуокружность, "крючки", синусоида, винтовая линия, волокна случайной формы на плоскости) и значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ при длине волокна $L=1$ и $n=101$.

Таблица 1

№№ п/п	Форма	Вид	λ_1	λ_2	λ_3	
1	Отрезок, L		0,085	0	0	
2	Один "крючок", L/4		0,050	0	0	
3	Два "крючка", по L/8		0,060	0	0	
4	Окружность		0,0125	0,0125	0	
5	и полуокруж- ность		0,0512	0,001	0	
6	Синусоида, ампл.= L/10, пе- риод = 0,4		0,042	0,004	0	
7	Винтовая линия, R=L/30, h=L/2		0,0725	0,0005	0,0005	
8	Волокна случай- ной формы, L		0,0327	0,0004	0	
	8-а		Волокно 1	0,0364	0,0003	0
	8-б		Волокно 2	0,0310	0,0002	0
	8-в		Волокно 3	0,0278	0,0004	0
	8-г		Волокно 4	0,0318	0,0003	0
	8-д		Волокно 5	0,0337	0,0005	0

Как следует из табл. 1, где представлены собственные числа некоторых волокон, собственные числа тензора J меняются в широких пределах и чувствительны к различиям в форме волокна, причем не зависят от начала отсчета и угла поворота системы координат.

В качестве дополнительной характеристики степени закрученности (спиральной формы) волокна предлагается использовать распределение угла изгиба линии волокна относительно соседнего его участка. В качестве оценки этого угла можно взять угол между приращениями $dr(k)$ радиусов-векторов $r(k)$ реперных точек волокна. Эти углы можно вычислить, используя их векторное произведение. Однако знака направления $dr(k)$ относительно $dr(k-1)$ это произведение не показывает. Например,

значение угла $\alpha = \pi/4$ может получиться при повороте $dr(k)$ относительно $dr(k-1)$ как по часовой, так и против часовой стрелки. Для определения знака угла задаем некоторый постоянно направленный вектор r , например, ориентированный вдоль оси Z: $r = (0 \ 0 \ 1)$, и вычислим смешанное произведение трех векторов (r ; $dr(k)$; $dr(k-1)$). Как известно [1], его численное значение равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, а знак зависит от того, какую тройку векторов: правую или левую, они образуют. Поскольку $r = \text{const}$, то этот знак определяется направлением поворота $dr(k)$ относительно $dr(k-1)$. В итоге получаем формулу для угла поворота:

$$\alpha(k) = \arcsin \frac{|dr(k-1) \times dr(k)|}{|dr(k-1)| |dr(k)|} \text{sign}(r; dr(k); dr(k-1)). \quad (2)$$

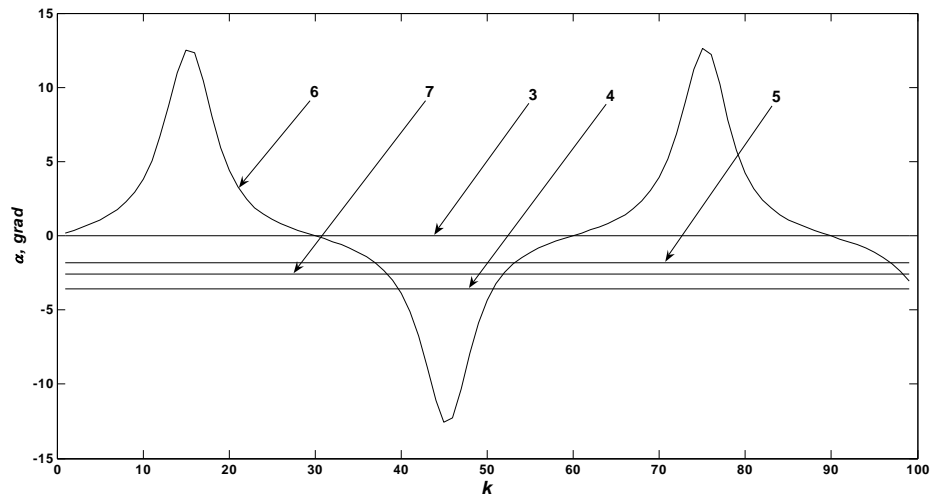


Рис. 1

Графики, показывающие изменение угла α для "регулярных" волокон, приведены на рис. 1 (из табл.1 пункты 3...7). Видно, что у окружности, полуокружности и винтовой линии угол искривления волокна, как и следовало ожидать, постоянен. У волокна с крючками угол искривления во-

локна равен нулю, причем изменение направления волокна в крючках на противоположное (на 180 градусов) не обнаруживается. При синусоидальной форме угол искривления волокна меняется как по величине, так и по знаку периодически вдоль длины волокна.

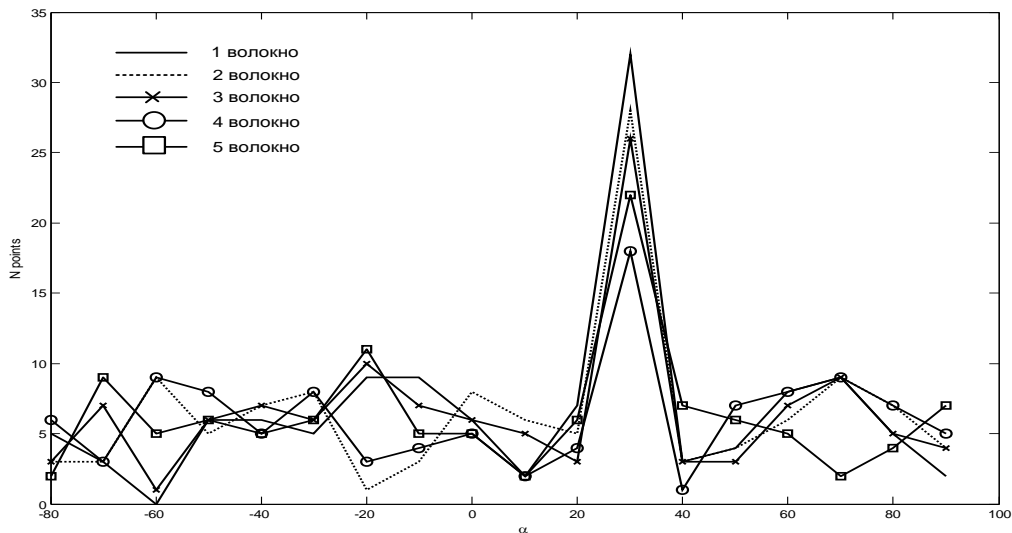


Рис. 2

На рис. 2 приведены графики, показывающие распределения углов извитости между соседними радиус-векторами реперных точек волокон (пункты 8а...8д, табл.1). Как видно из представленных графиков, распределения для пяти волокон незначительно отличаются друг от друга, что позволяет сделать вывод о закономерности данных распределений для любого

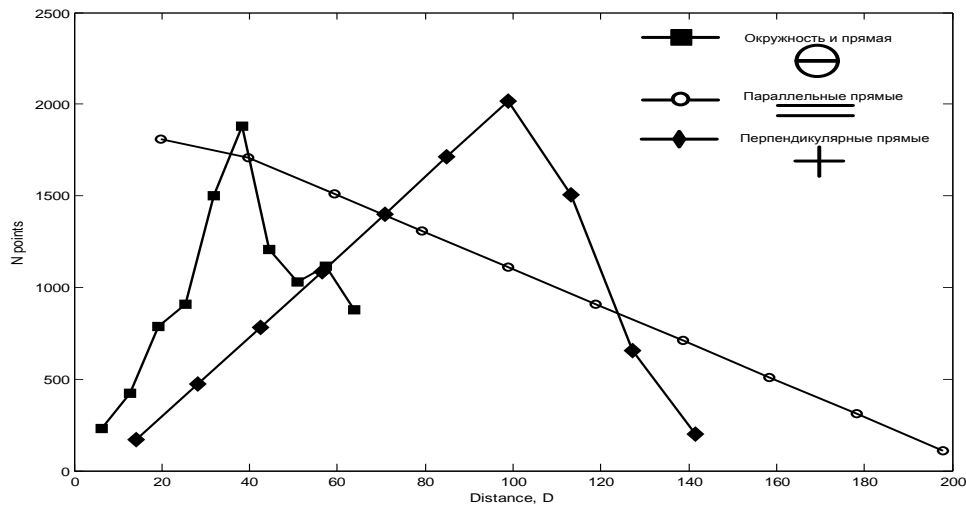
множества случайно сгенерированных волокон.

При оценке взаимного расположения пары волокон, заданных векторами радиусами своих реперных точек $r_1(j)$, $j = 1, \dots, n_1$ и $r_2(k)$, $k = 1, \dots, n_2$, очевидно, наиболее полная информация содержится в прямоугольной матрице D расстояний между любыми двумя реперными точками обоих волокон:

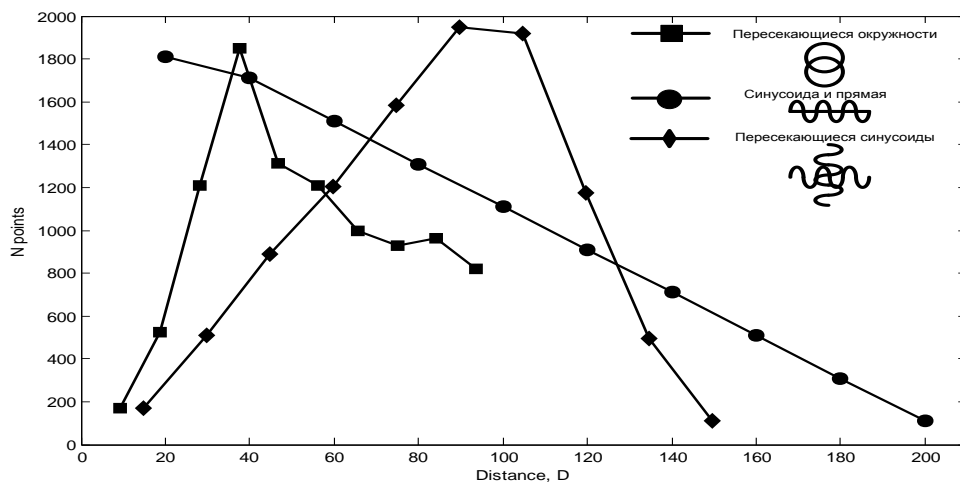
$$d_{jk} = \sqrt{\sum_{c=1}^3 (r_c(j) - r_c(k))^2}, \quad \mathbf{D} = \|d_{jk}\|, \quad j=1, \dots, n_1; \quad k=1, \dots, n_2. \quad (3)$$

Для получения интегральной информации о расстояниях между точками волокон предлагается использовать распределение значений d_{jk} и его числовые характеристики. Значения $\min(d_{jk})$ и $\max(d_{jk})$ дают информацию о величинах наибольшего сближения и удаления точек волокон. Среднее и медианное значения говорят о

средней удаленности волокон, а средне-квадратическое или среднее абсолютное отклонения дают обобщенную оценку расхождения между точками волокон. Число нулевых расстояний или расстояний, меньших некоторого заданного положительного минимума $\varepsilon > 0$, говорит о числе точек соприкосновения между волокнами.



а)



б)

Рис. 3

На рис. 3 приведены распределения расстояний для взаимных расположений двух одинаковых по длине волокон (а – окружность и прямая, параллельные прямые, перпендикулярные прямые, б – пересекающиеся окружности, синусоида и

прямая, пересекающиеся синусоиды), оцененные по 100 реперным точкам у каждого волокна, то есть матрица D содержала 10000 значений, по которым и строилась оценка.

ВЫВОДЫ

1. Предложены критерии оценки формы волокна и взаимного расположения двух волокон.
2. Дана оценка чувствительности критериев к изменениям формы волокна и статистической устойчивости критериев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры – М.: Физматлит, 2005.
2. *Митюшин Е. А.* Теоретическая механика: Учебник для вузов. – М.: Академия, 2006.
3. *Будников В.И.* Процесс деления в механическом прядении. – М.: Легкая индустрия, 1965.

Рекомендована кафедрой информационных технологий и систем автоматизированного проектирования. Поступила 28.11.08.
