

УДК 677.022.954:531.382

**БАЛЛОНИРОВАНИЕ И НАТЯЖЕНИЕ НИТИ  
НА КОЛЬЦЕВЫХ ПРЯДИЛЬНЫХ МАШИНАХ**

*В.П. ЩЕРБАКОВ, А.П. БОЛОТНЫЙ*

(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина,  
Костромской государственный технологический университет)

Большой интерес для теории и приложений в текстильной технологии всегда имел и имеет до сих пор вопрос о контурно-вращательном движении нити [1], [2]. Контурным или установившимся движением называют движение нити, которая сохраняет все время форму некоторой неизменной линии. Нить при этом движется вдоль линии с заданной относительной скоростью  $v_r = v_r(t)$ , а сама линия неподвижна или перемещается произвольным образом. Это движение реализуется на кольцевой прядильной машине при кручении и наматывании нити на початок. Нить линейной плотности  $\mu$  движется с постоянной скоростью  $v$  от вытяжного прибора через нитепроводник А (рис. 1 – баллон на кольцевой прядильной машине), затем проходит через бегунок В, движущийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по кольцу К радиуса  $R_k$ , и далее наматывается на початок радиуса  $r$ .

Корректные решения задачи о баллонировании нити даны в [1...5], [8]. Относительно полную библиографию можно найти в [3]. Однако изложенные в приведенной литературе работы известных и даже выдающихся механиков ограничены исследованием движения или относительного равновесия нити без учета на конце нити бегунка, то есть груза массы  $m_b$ , движущегося с трением по кольцу. Построенная в [6] математическая модель баллона учитывает достаточно полные условия, но

принятые допущения, неточности, а также устаревший метод моделирования ограничивают точное знание о наматывании на кольцевой прядильной машине.

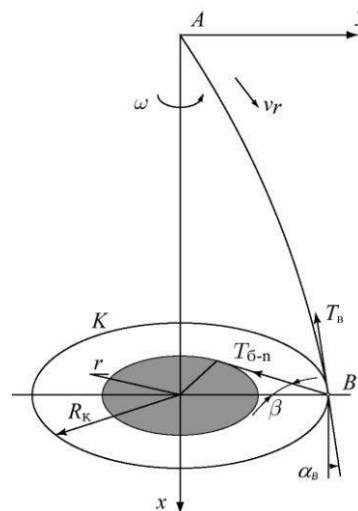


Рис. 1

При равномерном движении нити вдоль линии кажущегося покоя при наличии внешних сил линия кажущегося покоя совпадает с линией равновесия нити при тех же силах и тех же граничных условиях и линейных размерах. Натяжение движущейся нити увеличивается при этом на величину  $\mu v^2$  [3]. Дадим числовую оценку  $\mu v^2$ . При линейной плотности 25 текс, частоте вращения веретена  $20000 \text{ мин}^{-1}$ , крутке 810 кручений на метр и, следовательно, контурной скорости 24,7 м/мин величина  $\mu v^2$  составляет всего  $4,2 \cdot 10^{-3}$  мН. Тогда

нерастяжимую нить линейной плотности  $\mu$ , вращающуюся вместе с координатной системой  $Oxy$  с угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижной оси  $x$  можно рассматривать как находящуюся в покое без замены действительного натяжения  $T$  на кажущееся натяжение  $T^* = T - \mu v^2$ .

Вычисления по математической модели баллона, учитывающей достаточно общие условия, показывают, что задачу можно существенно упростить. Обычно пренебрегают, во-первых, силой тяжести нити, во-вторых, силой сопротивления воздуха. Дальнейшее упрощение предполагает пренебречь кориолисовой силой инерции (она мала по сравнению с переносной силой инерции из-за  $v_r \ll r\omega$ ). Расчеты показывают, что эти предположения не вносят большой погрешности в вычисления.

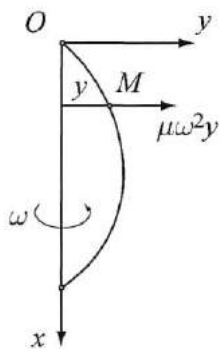


Рис. 2

Один из вариантов сводит математическую модель баллона к задаче о вращении нити, закрепленной концами на оси вращения (рис. 2). П. Аппель, который рассматривал задачу нахождения положения равновесия невесомой нити, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг оси (задача о "прыгалке"), показал, что форма нити в этом случае выражается в эллиптических функциях [4].

Спроектируем основное уравнение контурного движения на вращающиеся с

нитью координатные оси  $Oxy$  [3], [5]. Получим два уравнения контурного движения вращающейся нити:

$$\frac{d}{ds}\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T \frac{dy}{ds}\right) = -\mu\omega^2 y. \quad (1)$$

Из первого уравнения системы (1) следует, что проекция натяжения нити на направление оси вращения постоянна по всей длине нити:  $T \frac{dx}{ds} = C = \text{const}$ . Найдем

отсюда натяжение  $T$  и подставим его во второе уравнение:  $\frac{d}{ds}(Cy') = -\mu\omega^2 y$ . Здесь

$$y' = \frac{dy}{dx}. \quad \text{Введем обозначение } \frac{\mu\omega^2}{C} = \frac{2}{a^2},$$

учтем, что  $ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} dy$ . Тогда

предыдущее уравнение записывается в виде  $\frac{y'dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{2y}{a^2} dy$ . После интегриро-

вания имеем  $\sqrt{1+y'^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}$ , где  $b$  – новая постоянная интегрирования. Если решить последнее уравнение относительно

$y'$ , то получим  $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{a^2} \sqrt{(b^2 - a^2)^2 - a^4}$ .

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$x = \pm a^2 \int \frac{dy}{\sqrt{(b^2 - a^2 - y^2)(b^2 + a^2 - y^2)}}. \quad (2)$$

Интеграл выражается через специальные функции, которые называются эллиптическими. Тогда все стационарные точки находятся в классе эллиптических синусов [4]:

$$y = \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sn}\left(x \frac{\sqrt{2}}{ak'}\right), \quad k' = 1 - k^2, \quad k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}. \quad (3)$$

Величина  $a$  при данных  $\ell$  и  $h$  может

$$a(n) = \frac{h\sqrt{2}}{2nKk'}, \quad n = 1, 2, \dots \quad K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

то есть существует бесчисленное количество форм относительного равновесия нити, состоящих из одной, двух, трех и т.д. полуволен. Методами теории устойчивости на основе вариационного уравнения Лагранжа показано, что существует единственная кривая длины  $\ell$ , проходящая через точки  $O$ ,  $A$  и имеющая не больше одной полуволены на отрезке  $[O, h]$ . Следовательно, практически реализуется только одна, устойчивая форма относительного равновесия.

Определим неизвестные параметры  $a$  и  $b$ . Пользуясь равенством (2), получим первое уравнение:

$$\frac{h}{2} = a^2 \int_0^{\sqrt{b^2-a^2}} \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y, a, b)}}, \quad (4)$$

где  $\varphi(y, a, b)$  – многочлен, стоящий под знаком радикала в (2).

Найдем дифференциал дуги  $ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{b^2-a^2}{\sqrt{\varphi(y, a, b)}} dy$ . Теперь напишем второе уравнение:

$$\frac{\ell}{2} = \int_0^{\sqrt{b^2-a^2}} \frac{b^2-a^2}{\sqrt{\varphi(y, a, b)}} dy. \quad (5)$$

Далее из  $\frac{\mu\omega^2}{C} = \frac{2}{a^2}$  можно найти проекцию натяжения нити на направление оси вращения  $C$ . С учетом  $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{a^2}{b^2-y^2}$  натяжение вращающейся нити определяется формулой

$$T = \frac{C}{a^2}(b^2 - y^2). \quad (6)$$

При заданных  $h$  и  $\ell$  уравнения (4) и (5)

принимать счетный набор значений:

решаются численно на ЭВМ и находятся неизвестные параметры  $a$  и  $b$ . Приведем расчет натяжения нити линейной плотности 25 текс ( $\mu = 0,025$  г/м) при баллонировании на кольцевой прядильной машине применительно к условиям изложенной задачи. По фотографии баллона измерены высота баллона  $h = 0,252$  м, длина нити в баллоне  $\ell = 0,3$  м, угол между осью вращения и касательной к кривой баллона в вершине  $\alpha_A = 16'30''$ . Этот угол используется для задания начальных приближений для неизвестных  $a$  и  $b$  в вычислительном блоке Given – Find. Решение системы (4)...(5) дает  $a = 0,119$ ,  $b = 0,14$ . Тогда проекция натяжения нити на направление оси вращения нити равна  $T \frac{dx}{ds} = C = 218,1$ . По формуле (6) вычислено натяжение в вершине баллона при  $y = 0$ :  $T_0 = 301,864$  мН  $\approx 30,2$  сН.

Решение можно получить в аналитической форме, если считать нить достаточно полой [1], [3], [8]. Примем, что длина нити  $\ell$  мало отличается от расстояния  $h$  между точками закрепления нити. Тогда угол  $\alpha$  между касательной к нити и осью вращения  $x$  является малым и производная  $y' = \operatorname{tg} \alpha \ll 1$ .

Воспользуемся приближенным соотношением, получающимся при разложении радикала в ряд по степеням  $y'$ :  $ds = \sqrt{1+y'^2} dx \approx \left(1 + \frac{1}{2}y'^2\right) dx$ . Общее решение задачи для полой вращающейся нити

$$y = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{C_1 C_2}{\mu}} \sin \left( \sqrt{\frac{\mu}{C_1}} \omega x \right). \quad (7)$$

и точное решения (3) качественно не отличаются друг от друга.

Натяжение  $T$  определяется по формуле

$$T = \frac{\mu\omega^2 h^2}{\pi^2} \left[ 1 + 2 \frac{\ell - h}{h} \cos^2 \left( \frac{\pi}{h} x \right) \right]. \quad (8)$$

Для сравнения точного и приближенного решений вычислим натяжение  $T_0$  в вершине баллона по формуле (8) в условиях, приведенных выше в точном решении, и получим  $T_0 = 27,4$  сН. Здесь под точностью решения понимается отсутствие ограничений на длину нити в баллоне. Напомним, что в сравниваемом примере расчета по формуле (6)  $T_0 = 30,2$  сН. Относительная разность натяжений в рассмотренных примерах составляет 9,3%. Заметим, что часто рассматривают упрощенный вариант формы нити, определенной при  $(y')^2 = 0$ . Впервые в такой постановке вопрос о форме баллона поставил и решил Линднер (1910 г.). При этом нужно иметь в виду, что натяжение в этом случае постоянно по длине баллона. Такое решение может быть полезно для задания начальных приближений при численном решении уравнений, определяющих форму баллона.

Для баллона между нитепроводником и бегунком на кольцевой прядильной машине (рис. 1) действительна система дифференциальных уравнений и общее решение задачи для пологой вращающейся нити в виде (7):

$$y = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{C_1 C_2}{\mu}} \sin \left( \sqrt{\frac{\mu}{C_1}} \omega x \right).$$

Во вращающихся осях  $Ax$  нитепроводник  $A$  и бегунок  $B$  имеют постоянные координаты:  $x_A = 0$ ,  $y_A = 0$ ,  $x_B = h$ ,  $y_B = R_k$ . Но кроме граничных условий необходимо ввести дополнительное условие, которое является главным и определяет существенное отличие задачи о баллоне на кольцевой прядильной машине от баллонирования при отсутствии бегунка массы  $m_B$ .

Для получения этого условия рассмотрим мысленно движение одного бегунка

без нити, заменив ее реакцией. На бегунок будут действовать следующие силы.

– Натяжение нити в точке входа ее в бегунок, определяемое выражением (9) при  $x=h$ :

$$T_B = C_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{C_2} \cos \left( \sqrt{\frac{\mu}{C_1}} \omega h \right) \right]^2 \right\}. \quad (9)$$

Направление  $T_B$  определяется величиной производной в точке  $B$ :

$$y' = \operatorname{tg} \alpha_B = \sqrt{C_2} \cos \left( \sqrt{\frac{\mu}{C_1}} \omega h \right). \quad (10)$$

– Натяжение нити  $T_{6-н}$  между бегунком и початком. Между  $T_B$  и  $T_{6-н}$  существует некоторая функциональная связь, которая обычно представляется в виде формулы Эйлера. Из вывода этой широко известной формулы, которая приведена почти во всех учебниках по теоретической механике и без которой не обходится ни одна книга по механике нити и смежных с ней областей, следуют условия применения этой формулы. Прежде всего полагается расположение нити по геодезической линии, когда направления главной нормали нити и нормали к поверхности, на которой расположена нить, совпадают. Если бы контакт нити с бегунком был по винтовой линии, нахождение  $T_{6-н}$  не встречало бы затруднений. Однако, во-первых, форма бегунка на линии контакта не цилиндрическая, во-вторых, сечение дужки бегунка является прямоугольным. Поэтому если и применять соотношение между набегающей и сбегущей ветвями нити в виде формулы Эйлера, то нет смысла ее усложнять и можно ограничиться более простым плоским случаем. Если ветви нити образуют между собой угол  $\gamma = \alpha_B - \frac{\pi}{2}$ , то угол охватываемой нитью бегунка будет  $\pi - \gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha_B$ .

Тогда запишем

$$T_B = T_{\text{б-п}} e^{-k_n \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_B \right)}. \quad (11)$$

Обратим внимание на знак угла  $\alpha_B$ . Ранее было указано, что угол  $\alpha$  представляет собой угол наклона касательной в текущей точке кривой баллона к оси  $x$ . Пользуясь правой системой отсчета и считая отсчет углов положительным против часовой стрелки, на рис. 1 видим, что в начале координат  $A$  угол  $\alpha_0$  наибольший. Если

$$T_{\text{б-п}} = \frac{m_B \omega^2 R_k}{\frac{\sin \beta}{k_k} + \cos \beta + (\sin \alpha_B - \cos \alpha_B) e^{-k_n \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_B \right)}}. \quad (12)$$

Здесь  $\beta = \arcsin \frac{r}{R_k}$ ,  $k_k$  – коэффициент трения бегунка по кольцу.

$$R_k = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{C_1 C_2}{\mu}} \sin \left( \sqrt{\frac{\mu}{C_1}} \omega h \right), \quad \operatorname{tg} \alpha_B = \sqrt{C_2} \cos \left( \sqrt{\frac{\mu}{C_1}} \omega h \right),$$

$$\frac{m_B \omega^2 R_k}{\frac{\sin \beta}{k_k} + \cos \beta + (\sin \alpha_B - \cos \alpha_B) e^{-k_n \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_B \right)}} e^{-k_n \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_B \right)} = C_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{C_2} \cos \left( \sqrt{\frac{\mu}{C_1}} \omega h \right) \right]^2 \right\}.$$

Вычислим натяжение  $T_{\text{б-п}}$  на кольцевой прядильной машине П-76-5М4 при следующих условиях: пряжа линейной плотности  $\mu = 25$  текс, высота баллона  $h = 240$  мм, масса бегунка  $m_B = 0,075$  г, диаметр кольца  $D_k = 2R_k = 45$  мм, диаметр патрона  $d = 2r = 22$  мм, частота вращения веретена  $11000 \text{ мин}^{-1}$ . Приведенные значения высоты баллона  $h$ , диаметра початка  $r$  соответствуют наибольшей величине натяжения между бегунком и початком в конкретных условиях формирования пряжи. Если принять  $k_k = 0,17$ ,  $k_n = 0,23$ , то получим  $C_1 = 526,6$ ,  $C_2 = 0,036$ ,  $\alpha_B = -0,062$ . Максимальное натяжение при наматывании на прядильной машине, то есть натяжение между бегунком и початком в выше приведенных условиях, составит 74,65 сН. Минимальное натяжение возникает при

кривая формы нити имеет экстремум на участке между нитепроводником и бегунком (между точками  $A$  и  $B$ ), в точке, соответствующей  $y_{\max}$ ,  $\alpha = 0$ , далее угол наклона уменьшается, меняя знак на отрицательный.

– Остальные силы, действующие на бегунок, и условия его относительного равновесия приведены в учебниках [6], [7].

Из [7] запишем выражение для натяжения нити между бегунком и початком:

Таким образом, можно написать систему трех независимых уравнений, решаемых относительно  $C_1, C_2, \alpha_B$ :

наибольшем радиусе початка  $r = 20$  мм и минимальной высоте баллона  $h = 112$  мм. При этом заметно изменяются параметры формы баллона: угол входа нити в бегунок  $\alpha_B = 0,145$  радиана, проекция натяжения нити на ось  $x$  равна  $T \frac{dx}{ds} = C_1 = 324,3$ . Тогда наименьшее значение натяжения между бегунком и початком равно 44,0 сН.

Если не вводить никаких ограничений на длину нити в баллоне и, следовательно, на величину производной  $y'$ , то следуя А.П. Минакову, который развил уже изложенный нами метод Аппеля, форма нити в баллоне кольцевой прядильной машины определяется выражением

$$y = \frac{2 \sin \frac{\alpha_0}{2}}{a \sqrt{\cos \alpha_0}} \operatorname{sn} \left( \frac{a \cos \frac{\alpha_0}{2}}{\sqrt{\cos \alpha_0}} x \right), \quad (13)$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 \left[ 1 - \frac{1}{3 \cos^2 \alpha_0} (nx)^2 + \frac{1 + 3 \sin^2 \alpha_0}{30 \cos^4 \alpha_0} (nx)^4 - \dots \right].$$

Здесь  $n = \sqrt{\frac{\mu \omega^2}{2T_0}} = a \frac{\sqrt{\cos \alpha_0}}{\sqrt{2}}$ . Расчеты

длины нити в баллоне по формуле  $\ell = \int_0^h \sqrt{1 + y'^2} dx$  дают один и тот же результат с точностью до третьего знака, если в

$$\ell = \int_0^h \sqrt{1 + \left( \operatorname{tg} \alpha_0 - 3n^2 \frac{\sin \alpha_0}{3 \cos^3 \alpha_0} x^2 \right)^2} dx, \quad \operatorname{tg} \alpha_B = \operatorname{tg} \alpha_0 - 3n^2 \frac{\sin \alpha_0}{3 \cos^3 \alpha_0} h^2,$$

$$\frac{\sin \beta}{k_k} + \cos \beta + (\sin \alpha_B - \cos \alpha_B) e^{-k_n \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_B \right)} = C \sqrt{1 + \left( \operatorname{tg} \alpha_0 - 3n^2 \frac{\sin \alpha_0}{3 \cos^3 \alpha_0} h^2 \right)^2} e^{-k_n \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_B \right)}.$$

Вычисления при вышеприведенных условиях применительно к прядильной машине П-76-5М4 приводят к результату, отличающемуся от варианта решения, которое получено для пологой нити (система (13)...(15)).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Минаков А.П. К вопросу о форме баллона и натяжении нити на шелкокрутильных машинах американской и итальянской систем // Изв. МТИ. – 1927, т.1, вып. 1. С. 1...4.
2. Минаков А.П. О форме баллона и натяжении нити в крутильных машинах // Изв. МТИ. – 1929, т. 2. С. 1...36.
3. Основы механики нити/Якубовский Ю.В., Живов В.С., Коритыцкий Я.И., Мигушов И.И. – М.: Легкая индустрия, 1973.

где  $\operatorname{sn}$  обозначает эллиптический синус, и постоянная  $a$  представляет собой  $a^2 = \frac{\mu \omega^2}{C}$ . Разлагая правую часть формулы (13) в ряд, находим

разложении брать два или три члена. В этом случае решение задачи о баллонировании и натяжении нити на кольцевых прядильных машинах сводится к решению системы уравнений:

4. *Аппель П.* Теоретическая механика. – Т 1. – М.: Физматгиз, 1960.
5. *Меркин Д.Р.* Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
6. *Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А.* Моделирование технологических процессов. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.
7. Механическая технология текстильных материалов/Севостьянов А.Г., Осьмин Н.А., Щербаков В.П. и др. – М.: Легпромбытиздат, 1989.
8. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: РИО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 01.12.08.