УДК 677.21.021

ОБЩАЯ МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЫРЦОВОГО ВАЛИКА ПИЛЬНОГО ДЖИНА

Р.Ф. ЮНУСОВ

(ОАО "Paxta tozalash IIChB", г. Ташкент)

Для более детального рассмотрения метода решения введем вначале следующие безразмерные переменные:

$$\overline{t} = \frac{t}{t_0},\ \overline{\sigma}(\overline{t}) = \frac{\sigma_r(b,t)}{E},\ \overline{f}(\overline{t}) = \frac{f(t)}{E},$$

$$\overline{B} = \frac{B}{E},$$

$$\overline{G}(\overline{t}) = \frac{G(t)}{E},\ \ \overline{R}(\overline{t}) = \frac{R(t)}{E},$$

$$\varpi(t) = \frac{pb^2 w^2(t)}{4E},$$

$$\overline{a}(\overline{t}) = \frac{a^2(t)}{b^2},\ \overline{p}(\overline{t}) = \frac{p(t)}{E},$$

где t_0 – полное время выгорания поверхности; E – начальное значение модуля Юнга вязкоупругого материала.

Уравнение внутренней границы:

$$U_r(b, t) = 0 \qquad (1)$$

и интегральное уравнение второго рода типа свертки:

$$\sigma_r(b,t) + \frac{2\mu}{E}\int_0^t G'(t-\tau)\sigma_r(b,\tau)d\tau = \frac{\mu B}{E}\left[\frac{1}{2}pr^2\omega^2(t) - f(t)\right], \qquad (2)$$

где $\mu = \dfrac{E}{2G(0) - B}$, можно записать в безразмерном виде:

$$\bar\sigma(\bar t) = 2\mu \int_0^{\bar t} \bar\sigma(t) \frac{\partial}{\partial\tau} \bar G(\bar t - \tau) d\tau + \mu\bar B\left[2\bar w(\bar t) - \bar f(t)\right],$$

$$\bar\sigma(\bar t) = 2L(\bar t) \int_0^{\bar t} \bar f(t) \frac{\partial}{\partial\tau} \bar R(\bar t - \tau) d\tau + H(\bar t) + I(\bar t) f(\bar t),$$

$$L(\bar t) = \frac{3}{4}(1 - 2\nu_0)\left[1 - \bar a(\bar t)\right],$$

$$H(\bar t) = -\left[1 - \bar a^2(\bar t)\right]\left[\frac{3 - 2\nu_0}{2(1-\nu_0)} \varpi(\bar t) + \frac{3 - 2\nu_0}{2} \int_0^{\bar t} \varpi(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \bar R(\bar t - \tau) d\tau\right] - I(\bar t) = \frac{1}{2(1-\nu_0)}[1 - \bar a(\bar t)],$$

причем ν_0 – начальное значение коэффициента Пуассона вязкоупругого материала. Заменим теперь интегралы, как это сделано в работе [1], их приближениями при помощи конечных сумм. Например:

$$2 \int_{t_1=0}^{t_n=\bar t} \bar\sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \bar G(t_n - \tau) d\tau \approx \sum_{k=1}^{n=1} \left[\bar\sigma(t_k) + \bar\sigma(t_{k+1})\right]\left[\bar G(t_n - t_{k+1}) - \bar G(t_n - t_k)\right].$$

Тогда уравнения (2) и (3):

$$3\sigma_r = \frac{3K}{r} \frac{\partial}{\partial\tau}(r^2 \varepsilon_\theta) + 2\int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varepsilon_\theta + 2r \frac{\partial_\theta}{\partial r}\right) d\tau \qquad (3)$$

перепишутся в виде:

$$\bar\sigma_n = \mu \sum_{k=1}^{n-1} (\bar\sigma_{k+1} - \bar\sigma_k)\left(\bar G_{k+1} - \bar G_k\right) + 2\mu\bar B\varpi_n - \mu\bar B f_n,$$

$$\sigma_n = L_n \sum_{k=1}^{n-1} (\bar f_{k+1} + \bar\sigma_k)\left(R_{k+1} - R_k\right) + H_n + I_n \bar f_n,$$

где через G_k и R_k обозначены $\bar G(t_n - t_k)$ и $\bar R(t_n - t_k)$ соответственно, а величины с индексом k есть значения соответствующих функций при $t = t_k$. Эти два уравнения составляют систему двух линейных алгебраических уравнений относительно $\bar\sigma_n$ и $\bar f_n$, решение которой есть

$$\bar f_n = \frac{a_n \delta_n + \gamma_n}{\bar B - a_n \beta_n},$$

$$\bar\sigma_n = \frac{\bar B \delta_n + \beta_n \gamma_n}{\bar B - a_n \beta_n} = \delta_n + \beta_n \bar f_n,$$

где

$$\left.\begin{aligned}
a_n &= G - G_{n-1} - 1/\mu, \\
\beta_n &= I_n + L_n(R_n - R_{n-1}), \\
\gamma_n &= \bar\sigma_{n-1}(\bar G_n - \bar G_{n-1}) + 2\bar B\varpi_n + \sum_{k=1}^{n-2} (\bar\sigma_{k+1} - \bar\sigma_k)(G_{k+1} - G_k), \\
\delta_n &= H_n + L_n\left[\bar f_{n-1}(R_n - R_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-2} (\bar f_{k+1} + \bar f_k)(R_{k+1} - R_k)\right].
\end{aligned}\right\}$$

Если полагать последовательно n = 2, 3... и учесть решение уравнений (2) и (3) при n = 1, которое имеет вид

$$\bar{f}_1 = (2\mu\bar{B}\omega_1 - H_1)/(I_1 + 2\mu\bar{B}),$$

$$\bar{\sigma}_1 = \mu\bar{B}(\mu\omega_1 - \bar{f}_1),$$

то следующие уравнения:

$$\Omega(r,t) = 2\sigma_r + r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_r), \quad (4)$$

$$\Omega(r,t) + \frac{4}{3\hat{E}}\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial\Omega(r,t)}{\partial\tau}d\tau = 2f(t) - 2pr^2\omega^2(t) -$$
$$-\frac{2}{r}\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial^2(r^2\varepsilon_\theta)}{\partial r\partial\tau} + \frac{1}{3\hat{E}}\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2f(\tau) - 5pr^2\omega^2(\tau)\right]d\tau, \quad (5)$$

$$b^2\sigma_r(b,t) = \frac{1}{2}\left[b^2 - a^2(t)\right]\left[\left\{2 - \frac{R(0)}{K}\right\}f(t) - \frac{1}{K}\int_0^t R'(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] -$$
$$-\frac{p}{4}\left[b^4 - a^4(t)\right]\left[\left\{2 - \frac{R(0)}{K}\right\}w^2(t) - \frac{1}{2K}\int_0^t R'(t-\tau)w^2(\tau)d\tau\right] - a^2(t)p(t), \quad (6)$$

определяют $\bar{f}_n$ и $\bar{\sigma}_n$ через последовательно определенные величины.

Упругое решение получается просто заменой G(t) и R(t) соответствующими постоянными G(0) и R(0), что эквивалентно операции приравнивания величин

$$G_k = G_n,\ R_k = R_n,\ k = 1,2,...,n.$$

Теперь исследуем учет вязкоупругой сжимаемости в анализе напряжений, следуя работе [2]. Рассмотрим сначала теорию для плоской деформации и для осесимметричных задач вязкоупругости. За исключением влияния отдельного определяющего соотношения для объемного расширения анализ аналогичен анализу, рассмотренному выше, в котором материал предполагался упругим при гидростатическом сжатии. Так как принимаются условия плоской деформации и цилиндрической симметрии, то деформации ε_r, ε_θ и ε_z и перемещение u связаны соотношениями (1). Напряжения σ_r, σ_θ и σ_z удовлетворяют уравнению равновесия:

$$\sigma_r[0(t),t] = -p(t). \quad (7)$$

Касательное напряжение, вызванное угловым ускорением, не учитывается. Напряжения и деформации удовлетворяют определяющим уравнениям вязкоупругости, которые принимают вид:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\int_{0^-}^t G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)d\tau,$$

$$\sigma_r - \sigma_z = 2\int_{0^-}^t G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\varepsilon_r - \varepsilon_z)d\tau,$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = 3\int_{0^-}^t K(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z)d\tau. \quad (8)$$

Последнее уравнение (8) выражает вязкоупругое поведение при объемном разрешении. Материал с упругим изменением объема включается в (8) в качестве частного случая, когда K(t) есть константа. Уравнения (8), (9), (10):

$$r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta + pr^2\omega^2 = 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_r = \frac{u}{r},\quad \varepsilon_z = 0 \quad (10)$$

дают

$$r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + pr^2w^2 = -2\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)d\tau. \quad (11)$$

Следовательно:

$$\sigma_r(r,t) = f_1(t) - \frac{1}{2}pr^2w^2(t) - 2\int_{0^-}^{t} G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varepsilon_\theta(r,t)\,d\tau,$$

где $f_1(t)$ – произвольная функция, введенная при интегрировании. Чтобы получить другое независимое соотношение, связывающее σ_r и u, исключим σ_θ и σ_z из уравнений (8) и (11). Используя при этом уравнение (1), получаем:

$$3\sigma_r(r,t) = 3\int_{0^-}^{t} K(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau} + \frac{u}{r}\right)d\tau + 2\int_{0^-}^{t} G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)d\tau =$$
$$= \frac{1}{r}\int_{0^-}^{t}\left[3K(t-\tau) + G(t-\tau)\right]\frac{\delta^2}{\partial r\partial\tau}(ru)\,d\tau + 3\int_{0^-}^{t} G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)d\tau. \quad (12)$$

Чтобы в этом уравнении остались только члены, содержащие полные производные от u, исключим при помощи (11) второй интеграл в (12). Если вязкость материала считать малой и несжимаемой, тогда

$$\int_0^t \bar{R}_i(s)ds = E\int_0^t R_i(s)ds.$$

Условия несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0.$$

Начальные условия:

$$U[a(0),0] = U_0(r_0),\;\; r(0) = r_0,$$

$$\frac{\partial u[a(0),0]}{\partial t} = V_0(r_0).$$

Условия несжимаемости для U_3 имеют вид:

$$U_3 = y(t)/r,$$

где y(t) – произвольная функция времени.

Подставив последнее соотношение и выражение (11) в уравнение движения и проинтегрировав от $r(\tau)$ до b, с учетом граничных условий получаем:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = p(r,t) + \varepsilon\hat{O}(r,t,y),$$
$$\dot{r} = \varepsilon R,$$

где

$$\omega^2 = \omega^2(r) = \frac{\bar{E}r^2 + 2Gb^2}{L(r)(br)^2},\;\; E = \frac{E_0 h}{1-\nu^2} - 2Gb,$$

$$P(r,t) = \frac{bp(t)}{L(r)},\;\; \hat{O}(r,t,y) = B(r)\left\{\int_0^t [R_i(t-s)y(s) - c(r)R_2(t-s)y^3(s)]ds\right\},$$

$$B(r) = \frac{2G(b^2-r^2)}{L(r)br^2},\;\; c(r) = \frac{[b^4 + (br)^2 + r^4]}{6G(br)^4},$$

$$L(r) = p_0 h + bp\ln(b/r),\quad r = r(\tau),\;\; 0 \le t \le \infty.$$

Таким образом, динамическая задача определения напряженно-деформированного состояния цилиндра сводится к решению нелинейного интегрально-дифференциального уравнения (11) относительно функции y(t) со следующими начальными условиями:

$$y(0) = r_0 u_0(r_0),\;\; \dot{y}(0) = r_0\nu_0(r_0).$$

ВЫВОДЫ

Разработана общая методика решения задачи напряженно-деформированного состояния сырцового валика пильного джина, которая сводится к решению нелинейного интегрально-дифференциального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болдинский Г.И.* Теоретические основы оптимального процесса джинирования и вопросы порокообразования при нем: Дис....докт. техн. наук. – М.: МТИ, 1969.

2. *Мирошниченко Г.И.* Основы проектирования машин первичной обработки хлопка-сырца. – М.: Машиностроение, 1972. С. 186...190.

Рекомендована отделом джинирования, линтерования, волокноочистки, аэродинамики, обеспыливания и автоматизации. Поступила 10.02.09.