УДК 629.065

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РУЛОНОВ ТКАНИ ЧЕРЕЗ ПУНКТЫ ФОРМИРОВАТЕЛЯ ПАРТИЙ

Е.А. РЫЖКОВА

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)
E-mail: office@msta.ac.ru

Рассматривается построение вероятностной математической модели движения рулонов ткани через пункты формирователя партий и доказывается правомочность использования для этой цели экспоненциального закона.

Construction of likelihood mathematical model of the clothrolls movement through the parties reshaper points is considered, and the utilisation competency of an exponential law for this purpose is proved.

Ключевые слова: транспортировка тканей, пункты формирователя партий, вероятностная модель, количество рулонов.

Вспомогательное производство на заключительном этапе, когда ткань уже разбракована и промаркирована, сводится:

1) к ее транспортировке до и через пункты формирователя партий для отправки потребителям, а в случае невостребованности на склад;

2) к организации пунктов формирователя партий;

3) к организации работы склада.

Рассмотрим первый из перечисленных пунктов, то есть транспортировку тканей.

Модель транспортировки готовых тканей от браковочных столов к пунктам формирования партий можно представить в виде графа, изображенного на рис. 1.

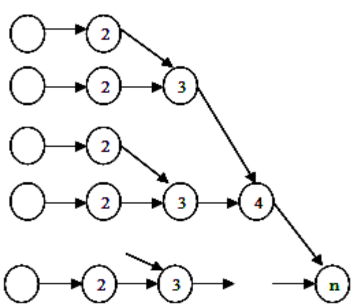

Рис. 1

Движение рулонов ткани в соответствии с этой моделью наиболее просто и точно может быть описано с помощью теории массового обслуживания. Как известно, для описания модели с помощью теории массового обслуживания необходимо определить следующие понятия.

1. Входной поток, то есть поток рулонов тканей, двигающихся от браковочных столов к пунктам формирования партий, где реализуются запросы на ту, или иную партию. Для описания входного потока требуется задать вероятностный закон, управляющий поступлением рулонов ткани f(t). В данном случае поступление зависит от времени разбраковки, которое, в свою очередь, зависит от длины рулона и наличия дефектов, и от времени упаковки. Но, с другой стороны, так как речь идет о конвейерных потоках, то можно принять, что моменты поступления запросов строго определены. В этом случае речь пойдет о наличии или отсутствии в конвейерной люльке рулона ткани.

2. Дисциплина очереди, то есть порядок обслуживания рулонов ткани. Под обслуживанием понимаем считывание информации на пунктах формирования партий. Для конвейерных потоков это очередь типа первым пришел – первым обслуживается.

3. Механизм обслуживания. Он характеризуется продолжительностью обслуживания и количеством действий, выполняе-

мых при обслуживании. Если конвеерная люлька пуста, то время обслуживания ее на пункте формирования партии равно времени ее движения мимо этого пункта. Если в люльке находится рулон, не затребованный для формирования заданной партии, то время на обслуживание равно времени на считывание информации о данном рулоне и ее анализе. Если в люльке находится рулон, затребованный в данной партии, ко времени считывания и анализа добавляется время на перемещение рулона в соответствующую тележку.

Рассмотрим распределение вероятностей для длительностей интервалов времени между последовательными поступлениями рулонов ткани на пункт формирования партии.

Если не учитывать пустые люльки, то можно предположить, что продолжительности между интервалами поступления рулонов статистически независимы, определяются одним и тем же распределением вероятностей и описываются некоторой непрерывной функцией f(t), представляющей собой плотность распределения. Тогда входной поток будет соответствовать процессу восстановления, а последовательность поступлений будет последовательностью рекуррентных событий.

Если f(t) есть плотность распределения продолжительностей интервалов t между любой парой последовательно идущих рулонов тканей, а λ – среднее число поступлений в единицу времени, то $1/\lambda$ – можно определить как среднее значение длительности временного интервала между поступлениями рулонов:

$$1/\lambda \equiv \int_0^\infty t f(t) dt. \qquad (1)$$

Так, например, если единицей времени является час, а $\lambda = 20$ есть среднее количество поступлений в час, то $1/\lambda = 0{,}05$ч, то есть в среднем в систему поступает запрос каждые 3 минуты.

Сделаем предположение, что входной поток является стационарным и не обладает памятью, то есть вероятность поступления рулона ткани на формирователь партии в любом достаточно малом промежутке времени (T, T+h) зависит только от длины интервала h и не зависит от положения на оси времени стартовой точки T и предшествующей истории. Это предположение эквивалентно записи

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda T}, \ t \geq 0. \qquad (2)$$

Допустим, что стартовой точкой является точка t = 0. Тогда вероятность отсутствия рулона на пункте формирования партии на интервале (0, T) равна вероятности того, что первое поступление имеет место после момента времени T:

$$[t \geq T] = \int_T^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}. \qquad (3)$$

При этом условная вероятность отсутствия рулона на пункте формирования партии на интервале (0, T+h) при условии, что не было ни одного поступления на интервале (0, T), будет

$$\frac{\int_{T+h}^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_T^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{\lambda e^{-\lambda t + h}}{\lambda e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t} = P[t \geq h], \qquad (4)$$

то есть зависит только от h. Согласно (4) вероятность отсутствия поступлений на интервале (T, T+h) не зависит от поступлений на интервале времени (0, T).

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, получим приближенную формулу вероятности отсутствия поступлений в любом интервале, имеющим длину h:

$$P[t = h] = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda h + \frac{(-\lambda h)^2}{2!} + \frac{(-\lambda h)^3}{3!} + \dots. \qquad (5)$$

Для достаточно малых положительных значений член $1-\lambda h$ в разложении (5) превосходит по своему значению сумму остальных членов ряда. Следовательно, этими членами можно пренебречь. Тогда для достаточно малых положительных значений h можно утверждать, что

$$P[t = h] \approx 1 - \lambda h. \qquad (6)$$

Если плотность распределения длительностей интервалов времени между поступлениями рулонов на обслуживание распределяется по экспоненциальному закону, то плотность распределения полного времени *y* для произвольным образом выбранных n последовательно идущих рулонов ткани будет определяться формулой:

$$g(y)=\frac{\lambda(\lambda y)^{n-1}e^{-\lambda y}}{(n-1)!},\ y\geq 0, \qquad (7)$$

где n – количество последовательно идущих рулонов ткани. Величину *y* можно интерпретировать как сумму n независимых выборок из экспоненциального распределения (2). Тогда

$$P(t)=\int_0^\infty g(y)dy=1-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda(\lambda y)^{n-1}e^{-\lambda y}}{(n-1)!}, \qquad (8)$$

где t – событие, соответствующее тому, что полное время для любой последовательности из n рулонов, обслуживаемых на пункте формирования партии, будет равно или меньше T.

В истинности последнего выражения легко убедиться, прибегнув к многократному интегрированию по частям.

Сделанное ранее предположение об экспоненциальном характере распределения длительностей интервалов между поступлениями рулонов на пункты формирования партий равносильно утверждению о том, что распределение вероятностей попадания n последовательно идущих рулонов в произвольно выбранный интервал времени продолжительностью T является пуассоновским:

$$P(A)=\frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}, \qquad (9)$$

где A – событие, соответствующее тому, что в любом интервале времени длиной T не менее n рулонов пройдет через пункт формирователя партий. То есть:

$$P(t) = P(A). \qquad (10)$$

Равенство (10) справедливо для любого рекуррентного процесса формирования входного потока при условии, что стартовая точка заданного интервала совпадает с одним из моментов поступления запроса на обслуживание.

Докажем, что длительность интервалов времени между обслуживанием соседних рулонов на пункте формирователя партии действительно подчиняется экспоненциальному закону распределения. Для этого примем следующее.

I. Длительность интервалов между последовательными поступлениями рулонов ткани взаимонезависимы, при этом, как было показано ранее, вероятность поступления требований в интервале (T, T+h) зависит только от h и не зависит от T. Плотность вероятности, соответствующую такому характеру входного потока, обозначим через f(t).

II. Существует некоторая ненулевая вероятность поступления рулона ткани на обслуживание в течение любого интервала времени h>0.

III. При достаточно малых значениях h количество поступающих рулонов ткани не превышает единицы.

IV. Система начинает функционировать в момент времени, равный 0, и первое обслуживание рулона ткани имеет место в момент времени t (t>0).

Тогда f(t) представляет собой плотность вероятности как для продолжительности между интервалами, так и для фактического времени появления первого рулона ткани.

Через r(T) обозначим вероятность того, что первый рулон ткани поступает после момента T, то есть:

$$r(T)\equiv 1-\int_0^T f(t)dt. \qquad (11)$$

В силу I и II:

r(T+h)=r(T)r(h) для любых T и h>0. (12)

Но единственной функцией, которая удовлетворяет (13) является:

$$r(T) = e^{-\lambda T}, \qquad (13)$$

где λ есть константа, причем $\lambda > 0$.

Таким образом:

$$e^{-\lambda T} = 1 - \int_0^T f(t)dt. \qquad (14)$$

Из (15) получаем

$$f(t) = e^{-\lambda T}, \qquad (15)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы получаем вероятностную модель, описывающую движение рулонов ткани через пункты формирования партии. Воспользовавшись формулой (9), можно оценить с заданной вероятностью количество рулонов, которое пройдет через пункт формирователя партии за время T, что, в свою очередь, позволит оценить время, затрачиваемое на подбор партии тканей для потребителя.

ВЫВОДЫ

1. Движение рулонов ткани наиболее просто можно описать с помощью теории массового обслуживания.

2. Распределение вероятностей попадания n последовательно идущих рулонов в произвольно выбранный интервал времени продолжительностью T подчиняется распределению Пуассона.

3. Полученная модель позволяет рассчитать вероятность того, что за заданное время через пункт формирователя партии пройдет заданное количество рулонов.

Рекомендована кафедрой автоматики и промышленной электроники. Поступила 09.04.10.