УДК 677 024

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕРОВНОТЫ ПРЯЖИ ПО ТОЛЩИНЕ

Л.А. СЕКОВАНОВА, Н.А.РЫБАКОВА

(Костромской государственный технологический университет)
E-mail: info@kstu.edu.ru

На основе теории диффузионных процессов получена стохастическая модель неровноты пряжи по толщине, которая позволяет вычислять случайные значения радиуса нити в любом ее поперечном сечении.

On the basis of the diffusion processes theory the stochastic model of yarn irregularity by thickness, which allows to calculate casual values of a thread radius in any of its cross section, is received.

Ключевые слова: структурная неровнота, расчетный диаметр, случайная величина, нормальное распределение, стохастическая модель.

Одним из входных параметров имитационной модели процесса взаимодействия основной нити с элементами технологической оснастки ткацкого станка является радиус нити [1]. Этот параметр принят за постоянную величину, так как рассматривалась идеальная нить, однородная по линейной плотности. Однако реальная нить неравномерна по линейной плотности и, следовательно, неравномерна по толщине.

При перемещении нити через глазок галева изменение ее толщины сказывается на величине контактных напряжений между нитью и глазком и, следовательно, на интенсивности разрушающих воздействий галева на нить. Диаметр 2r в различных сечениях ℓ нити принимает случайное значение. Поэтому радиус нити можно рассматривать как непрерывную случайную величину $R(\ell)$. Для определения закона распределения $R(\ell)$ и точечных оценок ее параметров был проведен лабораторный эксперимент по определению неровноты по линейной плотности хлопчатобумажной пряжи 50 текс.

На электронных весах ВЛР-200 со среднеквадратическим отклонением показаний 0,05 мг измеряли массу 50 отрезков нити одинаковой длины 10 см. Вычислены: среднее значение массы 5,037 мг; дисперсия 0,0257 мг^2; среднеквадратическое отклонение 0,16 мг; коэффициент вариации 3,2%. При принятой доверительной вероятности 0,95 ошибка точечных оценок составила 4,5%. Согласно [2] расчетный диаметр нити $d_p = 0{,}0357\sqrt{\dfrac{T}{\delta}}$, где T – линейная плотность, текс; δ – средняя плотность пряжи, мг/мм^3. По определению линейной плотности $T = \dfrac{M}{L}$, где M – масса, г; L – длина отрезка пряжи, км. Тогда расчетный диаметр

$$d_p = 0{,}0357\sqrt{\frac{M}{L\delta}} = 0{,}0357\sqrt{\frac{m\cdot 10^{-3}}{10^{-4}\delta}} = 0{,}1129\sqrt{\frac{m}{\delta}},$$

где m – масса отрезка нити длиной 10 см, мг.

Расчетный радиус $r = 0{,}056\sqrt{\dfrac{m}{\delta}}$.

Известно, что средняя плотность δ хлопчатобумажных нитей находится в пределах 0,8…0,9 [2]. Для упрощения расчетов приняли $\delta \approx 1$мг/мм^3 и для каждого измеренного значения массы m_i вычислили усредненное значение расчетного радиуса r_i (i=1,2,..,50). Несмещенные оценки математического ожидания M(R) и среднеквадратического отклонения $\sigma(R)$ оказались соответственно равными: r =0,127 мм, s = 0,002 мм.

Расчетное значение критерия Пирсона $\chi^2_{\text{набл}} = 1{,}195 < \chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;2) = 6$.

Следовательно, гипотеза о распределении случайной величины $R(\ell)$ по нормальному закону состоятельна, и функция плотности вероятностей имеет вид:

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s}e^{-\frac{(r-\bar{r})}{2s^2}}. \qquad (1)$$

Колебания расчетного радиуса нити по ее длине показаны на рис.1.

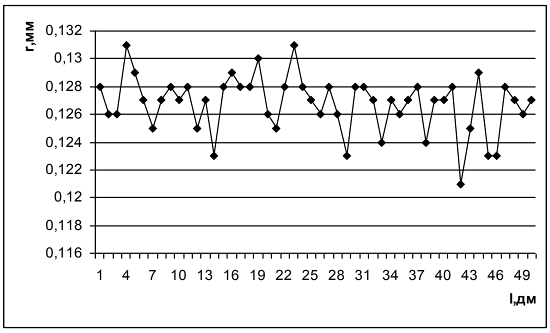

Рис. 1

Рассмотрим непрерывную модель изменения радиуса нити в виде диффузионного процесса [3]:

$$\partial r = \frac{dU}{dr}d\ell + \sigma dW, \qquad (2)$$

где U – потенциал; $dU/dr = a(r)$ – коэффициент сноса; σ – коэффициент диффузии; W – стандартный винеровский процесс. Соответствующее уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятностей имеет вид [3]:

$$\frac{\partial p(r,\ell)}{\partial \ell} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[a(r)p(r,\ell)\right] + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(r,\ell)}{\partial r^2}\ . \quad (3)$$

Стационарное распределение плотности вероятностей, полученное при $\partial p/\partial \ell = 0$, удовлетворяет уравнению

$$a(r)p(r) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{dp(r)}{dr}. \quad (4)$$

Уравнение (4) приводится к виду:

$$\frac{dp(r)}{p(r)} = \frac{2a(r)dr}{\sigma^2}\ . \quad (5)$$

В результате интегрирования уравнения (5), получим:

$$p(r) = C\exp\left(\frac{2}{\sigma^2}U(r)\right)\ , \quad (6)$$

где постоянная C определяется из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(r)dr = 1$.

Рассмотрим обратную задачу. Возьмем в качестве стационарной плотности нормального распределения функцию $\varphi(r)$, достаточно хорошо аппроксимирующую эмпирические значения r. Подставив ее вместо p(r) в равенство (6), получим:

$$\frac{2}{\sigma^2}U(r) = \ln\frac{\varphi(r)}{C}. \quad (7)$$

Дифференцируя обе части уравнения (7) и учитывая формулу (1), получим:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{r-\bar{r}}{2}\ . \quad (8)$$

Таким образом, уравнение (2) преобразуется к виду:

$$\partial r = -\frac{r-\bar{r}}{2}d\ell + \sigma dW\ . \quad (9)$$

Уравнение (9) определяет случайный процесс Орнштейна-Уленбека [4]:

$$dx = -\beta(x-a)dt + \sigma dW\,, \quad (10)$$

описывающий блуждание, в котором x притягивается к уровню, определяемому константой α. Решение уравнения (10) получено в работе [4] и имеет вид:

$$x(t) = \alpha + (x_0 - \alpha)e^{-\beta t} + \frac{2}{\sqrt{2\beta}}\sqrt{1-e^{-2\beta t}}\,\varepsilon\,, \quad (11)$$

где $x_0 = x(t_0 = 0)$; ε – нормально распределенная нормированная случайная величина. Из формулы (11) следует, что решение уравнения (9) можно записать так:

$$r(\ell) = \bar{r} + (r_0 - \bar{r})e^{-1/2} + s\sqrt{1-e^{-\ell}}\,\varepsilon\ , \quad (12)$$

где $r(\ell)$ – радиус нити в сечении, расположенном на расстоянии ℓ от начала отсчета. Генерировать значения ε_i нормально распределенной случайной величины ε можно по формуле

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{12}\xi_i - 6\,,$$

где ξ_i – равномерно распределенные на (0;1) случайные числа.

Функция $r(\ell)$ задает стохастическую модель непрерывного изменения толщины пряжи для любого $\ell \geq 0$. По формуле (12) были вычислены 25 случайных значений радиуса нити в сечениях с шагом 1 мм. Графически изменение радиуса нити показано на рис. 2 – моделированная кривая значений радиуса нити.

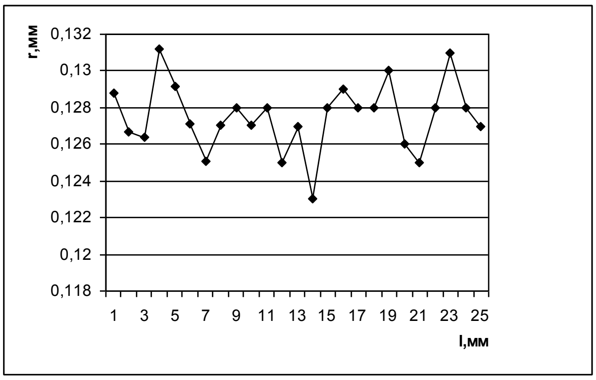

Рис. 2

Поскольку $e^{-\ell/2} \to 0$ при $\ell \to +\infty$, то с ростом ℓ второе слагаемое равенства (12) $(r_0 - \bar{r})e^{-\ell/2} \to 0$, а третье слагаемое $s\sqrt{1-e^{-\ell}}\varepsilon \approx s\varepsilon$. Следовательно, траектория r на $+\infty$ определяется равенством $r = \bar{r} + \sigma\varepsilon$, которое обычно используется для приближенного разыгрывания нормальной случайной величины с математическим ожиданием $a = \bar{r}$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = s$. Второе и третье слагаемые равенства (12) существенны при вычислении значения r для $1 \le \ell \le 10$. Например, при изменении ℓ от 0 до 10 мм. Если функция $r(\ell)$ определена на отрезке [1; 10], то можно продолжить эту функцию по непрерывности, приняв за начальные условия на новом отрезке [10; 20] значение r в конце предыдущего отрезка, и т.д. В качестве функции $\varphi(r)$ можно взять функцию, аппроксимирующую эмпирический полигон частостей другого признака структурной неровноты пряжи, например, неровноты пряжи по линейной плотности, по разрывной нагрузке, разрывному удлинению и др.

ВЫВОДЫ

1. На основе теории диффузионных процессов разработан метод стохастического моделирования структурной неровноты пряжи.
2. На примере моделирования неровноты пряжи по толщине получена случайная функция, непрерывно описывающая изменение радиуса нити по ее длине.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Секованова Л.А.* Теория взаимодействия основной нити с элементами технологической оснастки ткацкого станка и принципы моделирования процесса: Монография. – Кострома: КГТУ, 2006.
2. *Кукин Г.Н., Соловьев А.Н., Кобляков А.И.* Текстильное материаловедение. – М.: Легпромбытиздат, 1989.
3. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. – Т.1.– М.: Физматлит, 2008.
4. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. – СПб.: Изд-во политехнического университета, 2010

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 04.06.10.