

ПОСТРОЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОЙ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ МАЛОРАСТЯЖИМОГО ЛИСТА

А. Г. УСОВ

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

E-mail: usovusov@gmail.ru

На основе предложенной автором модели срединной поверхности малорастяжимого листа как многогранной поверхности рассматривается процесс построения поверхности изогнутого полотна как результат решения оптимизационной задачи.

On the basis of the model of a median surface of the low-stretchable sheet as a many-sided surface offered by the author, the process of construction of a writhed canvas surface as a result of the optimising problem decision is considered.

Ключевые слова: малорастяжимый лист полотна, компьютерное построение, оптимизационная задача, целевая функция, изогнутая и скрученная полоска драпа, скатерть на круглом столе.

Рассматриваются некоторые вопросы построения срединной поверхности изогнутого листа текстильного полотна на основе теории тонких упругих оболочек [1]. Изгиб считается превалирующим видом деформации, так что растяжениями срединной поверхности можно пренебречь. Моделью чистого изгиба листа можно пользоваться при исследовании процессов укладки полотен, перемещения листов с помощью захватов, а также при исследовании расположения и форм складок в различных ситуациях. Целью настоящей работы является обоснование и демонстрация применимости предлагаемого метода построения срединной поверхности на конкретных примерах.

Основным упругим параметром при исследовании изгиба оболочки служит жесткость при изгибе, которую, в соответствии с традицией теории оболочек, будем обозначать как и цилиндрическую жесткость символом D . Жесткость при изгибе текстильного полотна зависит от гораздо более многих факторов, чем, например, цилиндрическая жесткость однородной металлической пластины. При теоретическом расчете изгибной жесткости тканого

материала учитывается его макроструктура: плотности нитей по утку и основе, рапорт и прочее [2]. Будем предполагать изгибную жесткость заданной величиной, зависящей от направления изгиба.

Если срединная поверхность оболочки нерастяжима, она представляет собой развертывающуюся поверхность. Область, занимаемая листом ткани, может содержать плоские, цилиндрические, конические участки или участки поверхности касательных. Участки разделяются общими прямолинейными образующими – сепаратрисами.

Построение изогнутой поверхности состоит из трех основных этапов: построения начального плана изгиба на плоской развертке, построение начальной многогранной поверхности, аппроксимирующей гладкую изогнутую поверхность, построение оптимальной поверхности, соответствующей минимуму потенциальной энергии оболочки.

Составление плана изгиба выглядит как построение на плоской развертке недеформированного листа прямых образующих, которым предназначено быть ребрами многогранника. Рассмотрим задачу

определения формы полоски шинельного драпа размерами 5x10 см, заделанной коротким краем вдоль утка в вертикальный клещевой зажим. Предположим, что изогнутая поверхность может иметь конические участки, но не будет содержать вершин конусов. Начальная (нулевая) образующая будет, очевидно, проходить через захваченный край (ось Ox на рис. 1).

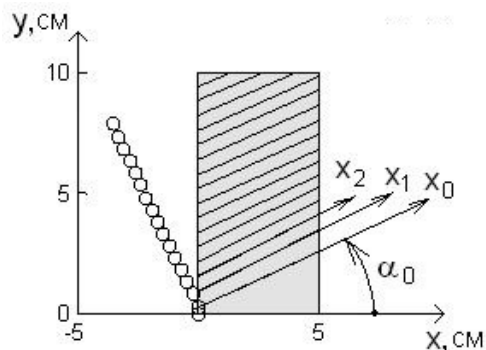


Рис. 1

Изогнутую поверхность будем строить как многогранную поверхность, состоящую из 17 граней. Задаем начальные углы между образующими: $\Delta\alpha_1^0$ – угол между начальной и первой образующей; $\Delta\alpha_2^0$ – угол между первой и второй образующей и т.д. В расчете этим величинам были присвоены нулевые значения, так что начальной направляющей служила ось Oy . В результате поиска оптимальной поверхности найдены: $\Delta\alpha_1 = 0,4315$; $\Delta\alpha_2 = 0,0420$... Начальная направляющая, полученная при этом, отмечена на рис. 1 кружками.

Предполагая, что первая грань, заключенная между начальной и первой образующими, не поворачивается относительно захвата, задаем начальные углы поворота граней друг относительно друга: $\Delta\beta_1^0$ – угол поворота второй грани относительно первой и остальные углы. В результате оптимизационного поиска получаем $\Delta\beta_1 = -0,3935$; $\Delta\beta_2 = -0,360$, ... Построенная поверхность изогнутой полоски изображена на рис. 2 (символом «х» отмечены центры тяжести граней).

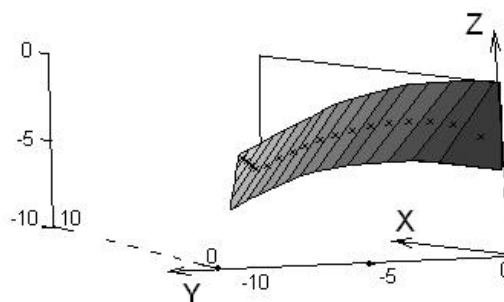


Рис. 2

При расчете учтена анизотропия изгибной жесткости. Найдены значения изгибной жесткости имевшегося образца драпа в разных направлениях относительно утка. Значения углов замера от утка до основы (в радианах): 0; 0,39; 0,79; 1,18; 1,57. Соответствующие значения изгибной жесткости (в $\text{кг}\cdot\text{см}^2/\text{с}^2$): 125; 1,225; 1,2; 1,3; 1,4. Промежуточные значения получены интерполированием. Контрольные значения изгибной жесткости получены путем обработки результатов экспериментов по цилиндрическому изгибанию полосок опытного материала, вырезанных в разных направлениях. Обработка происходила с использованием программы поиска оптимальной поверхности, при этом целевая функция составлена из потенциальной энергии деформированной оболочки и «штрафа» за отклонение координат контрольных точек модели поверхности от их экспериментальных значений.

Потенциальная энергия изогнутого полотна вычислялась как сумма энергий, отнесенных к отдельным граням:

$$U_0 = \sum_{n=1}^N (U_n^f + U_n^g),$$

где U_n^f – энергия упругих сил, отнесенных к n -й грани; U_n^g – потенциальная энергия грани в поле сил тяжести. Средняя плоская поверхность недеформированного листа в захвате служит поверхностью нулевого уровня потенциальной энергии. Поскольку проектируемая развертываемая поверхность имеет только

одну ненулевую главную кривизну K , потенциальную упругую энергию n -й грани примем в виде:

$$U_n^f = 0,5D \iint_{F_n} K_n^2 dx dy,$$

где F_n – область многоугольника грани. Для общего случая развертывающейся поверхности как поверхности касательных главная кривизна K в некоторой ее точке есть нормальная кривизна направляющей, проходящей через эту точку [3]:

$$K = -\frac{\kappa}{v\kappa}.$$

Здесь κ и k – кручение и кривизна горловой линии поверхности касательных, v – дуговой параметр, отсчитываемый от горловой линии вдоль образующей до рассматриваемой точки. Из приведенной формулы, с учетом особенностей направляющих развертывающейся поверхности [4], получаем, что приближенная величина нормальной кривизны в окрестности n -го ребра выстилаваемой поверхности может быть найдена как:

$$|K_n^0| = \left| \frac{\Delta\beta_n}{\Delta s_\sigma} \right|,$$

где $|\Delta s_\sigma|$ – длина дуги направляющей, находящейся на расстоянии σ от начальной направляющей. Обозначив через S дуговую координату начальной направляющей, получим:

$$|K_n^0| = \left| \frac{\Delta\beta_n}{\Delta s + \sigma\Delta\alpha_n} \right|.$$

В качестве средней кривизны для n -й грани примем среднее арифметическое значение кривизны в окрестностях примыкающих к данной грани образующих.

Потенциальная энергия n -й грани в поле сил тяжести равна произведению ее

веса на высоту, на которую перемещается центр тяжести грани.

Рассмотрим построение поверхности изгиба круглого листа ткани радиусом R , свисающего в виде скатерти с круглого горизонтального стола радиуса r . Такую модель изучают при расчете дисковым методом коэффициента драпируемости материала, и ищут площадь горизонтальной проекции изогнутой скатерти [5]. Анализируя строение развертки, находим, что она должна включать в себя многоугольник, описанный около окружности стола, плоские лепестки, отгибающиеся вниз, и конические области с общими с многоугольником вершинами. Для изотропного идеально драпирующегося материала развертка является фигурой, обладающей осевой симметрией m -го порядка. Каждой свисающей скатерти с определенным соотношением плотности и изгибной жесткости соответствует свое число m , при котором она обладает минимальной потенциальной энергией. Для изотропного материала порядок симметрии m увеличивается с уменьшением жесткости, лепестки и конусные зоны выглядят как выпуклые и вогнутые складки.

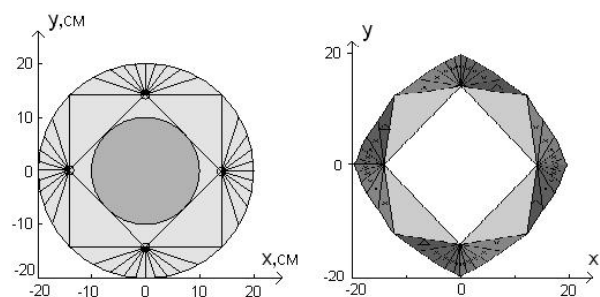


Рис. 3

На рис. 3 изображена развертка скатерти из шинельного драпа радиусом 20 см, наброшенной и прижатой к столу радиусом 10 см, в предположении, что жесткость на изгиб во всех направлениях та же, что и в направлении основы. Рядом изображена горизонтальная проекция свисающей скатерти.

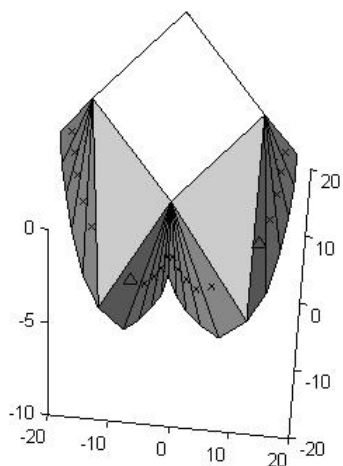


Рис. 4

На рис. 4 изображена пространственная модель скатерти. Анизотропная модель будет иметь две плоскости симметрии. Углы раствора смежных конусов будут разными, и лепестки будут разносторонними. Модель может быть доработана добавлением малых растяжений материала, наблюдаемых при образовании складок [6].

Отметим, что существуют и безмоментные модели складок [7].

Приведенные примеры демонстрируют применимость модели изогнутого текстильного полотна в виде многогранной

поверхности для исследования его изгибов вообще и для определения механических свойств полотна в частности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожиллов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991.
2. Смирнова Н. А., Козловский Д. А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2005, № 2. С. 12...15.
3. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958.
4. Раиевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. – Изд. 4-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
5. Кукин Г. Н., Соловьев А.Н., Кобляков А.И. Текстильное материаловедение (текстильные полотна и изделия). – М. : Легпромбытиздат, 1992.
6. Смирнов А. В., Брут-Бруляко А. Б. Экспериментальные исследования драпируемости льняных тканей// Тез. докл. Междунар. научн.-техн. конф.: Лен – 98. – Кострома: КГТУ, 1998. С. 104...106.
7. Иванова О. В., Смирнова Н. А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007, №6. С.79...82.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 25.04.10.