

УДК 667.064.530.376

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ НИТЕЙ

П.Ю. ТЕР-МИКАЭЛЯН, М.В. ШАБЛЫГИН, В.Ш. САРКИСОВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

E-mail: office@msta.ac.ru

В предлагаемой модели для описания нелинейной вязкоупругости комплексной нити вязкоупругие свойства компонентов нити – мононитей – описываются трехэлементными механическими моделями с различными упругими и вязкими характеристиками, учитывающими наличие упругой и высокоэластической деформации мононитей при их растяжении.

In the offered model for the description of the complex thread nonlinear viscoelasticity the viscoelastic properties of a thread components – monothreads – are described by three-element mechanical models with the various elastic and viscous characteristics noting the presence of the elastic and high-elastic deformation of monothreads under their stretching.

Ключевые слова: комплексные нити, нелинейная вязкоупругость, гипотеза о подобии кривых ползучести, область неразрушающего действия напряжения, дифференциальные уравнения.

В работе [1] для описания нелинейной вязкоупругости комплексных нитей из гибкоцепных полимеров (капроновая нить, лавсановая нить) в области малых деформаций применялась модель, в которой упругие и вязкие характеристики моонитей, являющиеся компонентами комплексной нити, определялись с применением принципа напряженно-временной аналогии. Однако, как следует из [2], применение данных принципов для описания ползучести комплексных нитей, например, для нити фенилон, характеризующихся только увеличением параметра скорости $d\varepsilon/dlgt$, с возрастанием времени t проведения эксперимента не представляется возможным (рис.1 – схематическое изображение кривых ползучести в координатах $\varepsilon - lgt/t_1$, где t_1 – постоянная, выбор которой определяется интервалом времени проведения эксперимента; $\sigma_1 < \dots < \sigma_i < \dots < \sigma_n$ – напряжения). Поэтому возникает необходимость в разработке моделей для описания нелинейной вязкоупругости таких нитей.

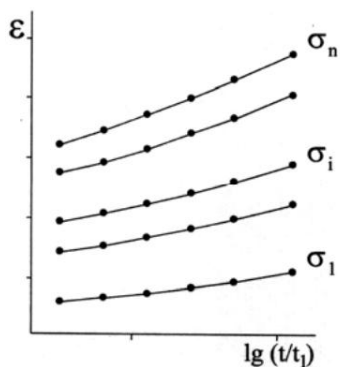


Рис. 1

В настоящей статье приводится модель для описания нелинейной вязкоупругости комплексных нитей с применением гипотезы о подобии кривых ползучести [3,с.323] с математической формулировкой, которая имеет вид:

$$\varepsilon_B = \varphi(\sigma)\psi(t, T), \quad (1)$$

где ε_B – высокоэластическая деформация; $\varphi(\sigma)$ – функция, зависящая от напряжения; $\psi(t, T)$ – функция, зависящая от времени t и температуры T :

$$\psi(0, T) = 0.$$

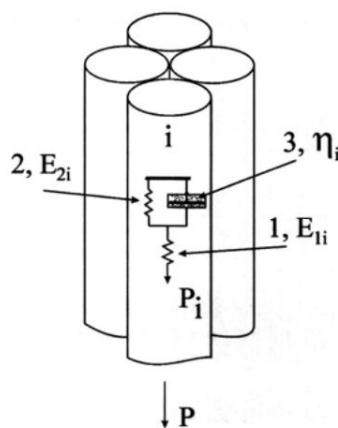


Рис. 2

Для описания нелинейной вязкоупругости комплексных нитей с применением гипотезы о подобии кривых ползучести рассмотрим модель, приведенную на рис.2 (схематическое изображение комплексной нити). В данной модели вязкоупругость компонент комплексной нити в области малых деформаций описывается трехэлементными механическими моделями, которые для моделирования деформации всей нити соединены параллельно (рис.3 – схематическое изображение соединения механических моделей).

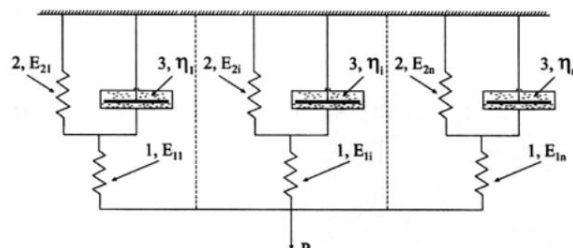


Рис. 3

Каждая из моделей учитывает наличие упругой и высокоэластической деформации в соответствующих компонентах нити. Упругий элемент 1 *i*-й механической модели моделирует упругую деформацию *i*-й мононити, реализующейся мгновенно после приложения (снятия) нагрузки. Модуль упругости элемента 1- E_{1i} . Высокоэластическая деформация *i*-й мононити, зависящая от времени пребывания мононити под нагрузкой и обусловленная обратимыми активационными процессами, протекающими в мононити в процессе ее деформации, моделируется упругим элементом 2 и вязким элементом 3. Модуль упругости упругого элемента 2 *i*-й механической модели – E_{2i} . Коэффициент вязкости среды *i*-й механической модели – η_i .

Из условия равновесия для *i*-й механической модели имеем:

$$\sigma_i = \sigma_{1i} = \sigma_{2i} + \sigma_{3i}, \quad (2)$$

где σ_i – напряжение, обусловленное приложенной силой P ; σ_{1i} – напряжение, возникающее в первом элементе; σ_{2i} – напряжение, возникающее во втором элементе; σ_{3i} – напряжение, возникающее в третьем элементе.

Суммарная деформация ε_i *i*-модели складывается из упругой деформации модели $\varepsilon_{yi} = \varepsilon_{1i} = \frac{\sigma_{1i}}{E_{1i}}$ и высокоэластической деформации ε_{vi} :

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_{1i}} + \varepsilon_{vi}, \quad (3)$$

где $\varepsilon_{vi} = \varepsilon_{2i} = \varepsilon_{3i}$; ε_{2i} – деформация элемента 2; ε_{3i} – деформация элемента 3. Из уравнения (3) следует:

$$\varepsilon_{vi} = \varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E_{1i}}. \quad (4)$$

Учитывая, что скорость высокоэластической деформации $\frac{d\varepsilon_{vi}}{dt}$ связана с напряжением σ_{3i} равенством $\sigma_{3i} = \eta \frac{d\varepsilon_{vi}}{dt}$, где η

– коэффициент вязкости, а напряжение возникающее в элементе 2, равно $\sigma_{2i} = E_{2i}\varepsilon_{2i}$, из уравнений (2) и (4) выводится дифференциальное уравнение механической модели для описания процесса растяжения *i*-й мононити, учитывающее действие напряжения на процесс деформации и ряд других факторов:

$$\sigma_i = E_{2i} \left(\varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E_{1i}} \right) + \eta_i \frac{d\varepsilon_{vi}}{dt}, \quad (5)$$

где $\eta_i = \eta_i(\Delta U(\sigma_{\Pi i}), t, \varepsilon_{nvi}, T)$ – коэффициент вязкости, t – текущее время, E_{1i} и E_{2i} – упругие характеристики; ε_{nvi} – уровень предварительной высокоэластической деформации; $\Delta U(\sigma_{\Pi i})$ – энергия активации, определяемая из экспериментов на ползучесть, соответствующая напряжению $\sigma_{\Pi i}$; T – температура испытания. Рассматривая мононить как реологическое твердое тело, допустим, что при растяжении *i*-й мононити в изотермических условиях при $\varepsilon_{nvi} = 0$ для коэффициента вязкости η мононити выполняется правило логарифмической аддитивности, то есть

$$\eta = C\eta_1(N)\eta_2(\Delta U(\sigma_{\Pi}))\eta_3(M), \quad (6)$$

где $C = \text{const}$, $N = N_0\psi(t)$; N_0 – число активационных центров при $t = 0$; $\psi(t)$ – функция, зависящая от времени; M – средняя молекулярная масса мононити.

Из зависимости (6), при $M = \text{const}$, следует, что

$$\eta = C_1 f(\sigma_{\Pi})\psi(t), \quad (7)$$

где $C_1 = CN_0\eta_3(M)$; $\eta_2(\Delta U(\sigma_{\Pi})) = f(\sigma_{\Pi})$; $f(0) = 1$.

Из (7) вытекает, что зависимость коэффициента вязкости среды i -й механической модели от напряжения и времени должна иметь следующий вид:

$$\eta_i(\sigma_{\Pi i}, t) = C_{1i} f_i(\sigma_{\Pi i}) \psi_i(t). \quad (8)$$

Допустим, что упругие характеристики i -й модели E_{1i} , E_{2i} изменяются в процессе растяжения модели по следующим законам: $E_{1i} = E_{10i} f_i(\sigma_{\Pi i})$, $E_{2i} = E_{20i} f_i(\sigma_{\Pi i})$, где E_{10i} и E_{20i} – постоянные. Следует отметить,

$$\sigma_i = E_{20i} f_i(\sigma_{\Pi i}) \left(\varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E_{10i} f_i(\sigma_{\Pi i})} \right) + C_{1i} f_i(\sigma_{\Pi i}) \psi_i(t) \frac{d\varepsilon_{Bi}}{dt}. \quad (9)$$

После умножения правой и левой частей равенства (9) на m_i , а затем деления на

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i m_i}{f_i(\sigma_{\Pi i})} = \sum_{i=1}^n m_i \left[E_{20i} \left(\varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E_{10i} f_i(\sigma_{\Pi i})} \right) + C_{1i} \psi_i(t) \frac{d\varepsilon_{Bi}}{dt} \right]. \quad (10)$$

Для установления зависимости σ_i от σ воспользуемся формулой $\sigma_i = P_i/s_i$ где P_i – сила, приложенная к i -й мононити; s_i – площадь поперечного сечения i -й мононити. Уравнение равновесия модели, с учетом приведенной формулы для напряжения σ_i , представим в виде:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n m_i \sigma_i, \quad (11)$$

где $m_i = s_i/S$; S – площадь поперечного сечения комплексной нити.

Из условия совместности упругой деформаций $\varepsilon_{yi} = \varepsilon_{yj}$ и закона Гука следует:

$$\sigma_j = \sigma_i \frac{E_{10j} f_j(\sigma_{\Pi j})}{E_{10i} f_i(\sigma_{\Pi i})}.$$

После подстановки последнего равенства в уравнение (11) и проведения преоб-

что, поскольку энергия активации $\Delta U(\sigma_{\Pi i})$ не зависит от режимов достижения заданного $\sigma_{\Pi i}$ и определяется из экспериментов на ползучесть, то введение зависимостей для E_{1i} , E_{2i} и η_i от $\sigma_{\Pi i}$ означает, что величины данных характеристик при нагружении не зависят от режимов достижения заданного напряжения $\sigma_{\Pi i}$. С учетом равенства (8) и приведенных зависимостей для E_{1i} и E_{2i} дифференциальное уравнение (5), после проведения подстановок, приводится к виду:

$f_i(\sigma_{\Pi i})$ и проведения суммирования получаем:

разований получим зависимость для σ_i :

$$\sigma_i = \frac{\sigma E_{10i} f_i(\sigma_{\Pi i})}{\sum_{i=1}^n m_i E_{10i} f_i(\sigma_{\Pi i})}. \quad (12)$$

Из уравнения (10) с использованием уравнения

$$\frac{d\varepsilon_{Bi}}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{E_{10i} f_i(\sigma_{\Pi i})} \frac{d\sigma_i}{dt}$$

(уравнение следует из условия совместности деформаций: $\varepsilon = \varepsilon_i = \varepsilon_{yi} + \varepsilon_{Bi}$ и закона Гука) и зависимости (12) выводится дифференциальное уравнение модели для описания вязкоупругих свойств комплексной нити, включающее в себя вязкоупругие характеристики компонент нити:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon \sum_{i=1}^n m_i E_{20i}}{\sum_{i=1}^n m_i C_{1i} \psi_i(t)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i E_{10i} f_i(\sigma_{\Pi i})} \frac{d\sigma}{dt} + \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n m_i E_{20i}}{\sum_{i=1}^n m_i E_{10i}} \right) \frac{\sum_{i=1}^n m_i E_{10i}}{\sum_{i=1}^n m_i E_{10i} f_i(\sigma_{\Pi i})} \frac{\sigma}{\sum_{i=1}^n m_i C_{1i} \psi_i(t)}. \quad (13)$$

Разрешая (13) относительно ε при напряжении $\sigma = \text{const}$, получим уравнение

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sum_{i=1}^n m_i E_{10i} f_i(\sigma_i)} \left\{ 1 + \frac{\sum_{i=1}^n m_i E_{10i}}{\sum_{i=1}^n m_i E_{20i}} \left[1 - \exp \left(- \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^n m_i E_{20i}}{\sum_{i=1}^n m_i C_{1i} \psi_i(\xi)} d\xi \right) \right] \right\}. \quad (14)$$

В (14) индекс "П" при символе σ опущен.

Из уравнения (14) выводится уравнение для ε , которое по своей структуре аналогично уравнению (1), что позволяет использовать уравнения модели (14) для описания ползучести исследуемых объектов с применением гипотезы о подобии кривых ползучести.

ползучести модели, которое представим в виде:

Для описания ползучести реальных комплексных нитей с использованием упругих и вязких характеристик компонент нити, характеризующихся кривыми ползучести, приведенными на рис. 1, положим, что $E_{10i} = E_{10j} = E_{10}$, $E_{20i} = E_{20j} = E_{20}$, $C_{1i} = C_{1j} = C_1$, $f_i(\sigma_i) = f_j(\sigma_j) = f(\sigma)$, $\psi_i(\xi) = \psi_j(\xi) = \psi(\xi)$, где $i = 1, 2, 3, \dots, j, \dots, n$. Тогда уравнение (14) приводится к виду:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_{10i} f(\sigma)} \left\{ 1 + \frac{E_{10}}{E_{20}} \left[1 - \exp \left(- \int_0^t \frac{E_{20}}{C_1 \psi(\xi)} d\xi \right) \right] \right\}. \quad (15)$$

Для установления взаимосвязи E_{10} , $f(\sigma)$, $\frac{E_{10}}{E_{20}}$ и $\frac{E_{20}}{C_1 \psi(t)}$ с упругими и вязкими характеристиками мононити, определяемыми из экспериментов на ползучесть, рассмотрим уравнение ползучести модели (15) и уравнение ползучести, описывающее реальные кривые мононити:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} F(\sigma) [1 + a\phi(t)], \quad (16)$$

где E – модуль упругости мононити; $a = \text{const}$; $\phi(t)$ – функция, зависящая от времени t ; $\phi(0) = 0$; $F(\sigma)$ – функция, зависящая от напряжения.

Из уравнений (15) и (16) следует, что

$$E_{10} = E, f(\sigma) = F^{-1}(\sigma), \quad (17)$$

$$\frac{E_{10}}{E_{20}} = a, \frac{E_{20}}{C_1 \psi(t)} = \frac{\phi'(t)}{1 - \phi(t)}.$$

Полученные формулы (17) позволяют определять упругие и вязкие характеристики механических моделей, используя кривые ползучести мононитей. После определения упругих и вязких характеристик механических моделей по кривым ползучести мононитей с применением (17) становится возможным определение функций и постоянных входящих в уравнение ползучести модели (14) и в дифференциальное уравнение модели (13). Следует отметить, что изложенный подход с учетом введения

в математическое описание механической модели зависимости коэффициента вязкости от уровня предварительной высокоэластической деформации нити позволяет применить дифференциальное уравнение (13) и для описания и прогнозирования деформационных свойств комплексной нити, проявляемых при многоступенчатом режиме нагружения, по известным кривым ползучести мононитей.

ВЫВОДЫ

Разработана модель для описания нелинейной вязкоупругости комплексной нити в области неразрушающего действия напряжения, в которой вязкоупругость

компонентов нити описывается с применением гипотезы о подобии кривых ползучести.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Микаэлян П.Ю., Саркисов А.Ш., Саркисов В.Ш. // Сб. научн. тр.: Физикохимия полимеров (синтез, свойства и применение). – Тверь: ТГУ, 2008, вып. 14. С. 57...68.
2. Тер-Микаэлян П.Ю., Шаблыгин М.В., Саркисов В.Ш. // Химические волокна. – 2008, №6. С.40...43.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968.

Рекомендована кафедрой высшей математики.
Поступила 21.05.10 .