УДК 677-486.2:539.11

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К РАСЧЕТУ ДВУМЕРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТРИКОТАЖА

Л.А. КУДРЯВИН, О.Ф. БЕЛЯЕВ, В.А. ЗАВАРУЕВ, О.С. КОТОВИЧ

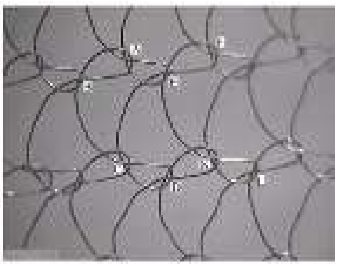
(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)
E-mail: office@msta.ac.ru

Описана программа, основанная на математическом пакете MATLAB, позволяющая определить форму повторяющегося элемента после деформации и рассчитать относительную деформацию такого элемента при деформации образца, а следовательно, рассчитать относительную деформацию самого образца.

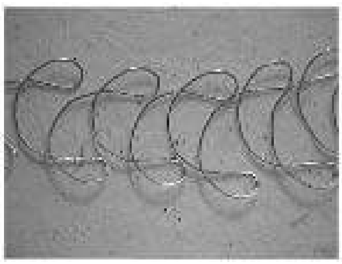
The program based on MATLAB mathematical package, allowing to define the form of a repeating element after deformation and to count a relative deformation of such element under the deformation of the sample and, consequently, to count a relative deformation of the sample, is described herein.

Ключевые слова: трикотаж, повторяющийся элемент, относительная деформация, программа, основанная на математическом пакете MATLAB, форма повторяющегося элемента после деформации.

В большинстве текстильных материалов, кроме некоторых (например, нетканых), можно выделить в нити (или в волокне) сравнительно простой повторяющийся элемент, относительная деформация которого соответствует относительной деформации всего образца. Например, на рис. 1-а показана микрофотография металлического трикотажа, повторяющимся элементом в котором является элемент ABCD. Его аналогами будут элементы DCEF, EFKL и т.д.



а)



б)

Рис. 1

Рассчитав относительную деформацию такого повторяющегося элемента, получаем относительную деформацию всего образца. Поскольку волокна и нити при деформации образца растягиваются мало, деформация материалов из них осуществляется в основном за счет изгиба данных волокон и нитей. Для расчета деформации удобно использовать нелинейную теорию упругости. Будем полагать, что на рассматриваемый повторяющийся элемент (сокращенно – упругую линию) не действуют распределенные, а действуют только сосредоточенные силы,

Следует отметить, что если нить, например, в металлическом трикотаже (трикотаже, изготовленном из микропроволок), аккуратно препарировать (освободить от взаимодействия с другими нитями – микропроволоками), то форма и размер петель мало меняются при освобождении микропроволоки от взаимодействия с другими микропроволоками (рис.1-б), то есть микропроволока при изготовлении трикотажа пластически деформируется. Возможно, что такое же явление имеет место и при использовании в качестве нити других материалов.

Рассмотрим упругую линию, полученную в результате того, что нить произвольной начальной кривизны (например, пластически деформированная при создании текстильного материала) нагружена некоторым конечном числом сосредоточенных сил и внешних моментов.

Используем подход, предложенный в работе Попова Е.П. [1].

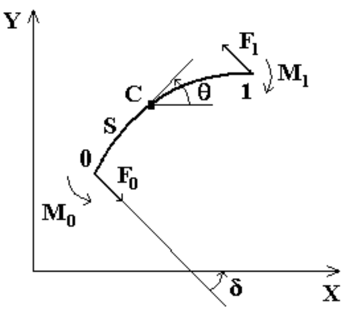


Рис. 2

Упругую линию в этом общем случае всегда можно разделить на участки так, чтобы сосредоточенные силы F_0 и F_1 и внешние изгибающие моменты M_0, M_1 были приложены только по концам 0 и 1 (рис.2) рассматриваемого участка упругой линии (силы и моменты взяты с учетом действия отрезанных частей нити на участок 0-1). Если на участке 0-1 отсутствуют распределенные силы, то из условия равновесия участка имеем $F_0+F_1=0$ или $F_0=-F_1$. Условимся направление силы F_0, приложенной в начальной точке рассматриваемого участка 0-1 упругой линии, считать основным направлением.

Введем угол δ, отсчитываемый против часовой стрелки от направления силы F_0 к направлению оси X (или по часовой стрелке от направления оси X к направлению силы F_0). Начальную кривизну упругой линии (стержня, нити) (кривизна – величина, обратная радиусу кривизны R) будем считать переменной по длине s (s – это расстояние по нити от начальной точки 0 участка до рассматриваемой точки C).

Основным уравнением в нелинейной двумерной теории упругости тонких стержней является следующее дифференциальное уравнение второго порядка [1]:

$$d^2\theta/ds^2 - d^2\theta_0/ds^2 = -(F/H)\sin(\theta+\delta). \quad (1)$$

Здесь θ и θ_0 – углы наклона касательной к упругой линии в произвольной точке C к оси X в деформированном и недеформированном состояниях рассматриваемого участка нити; F – величина силы, действующей на концы выделенного участка; H – жесткость нити при изгибе.

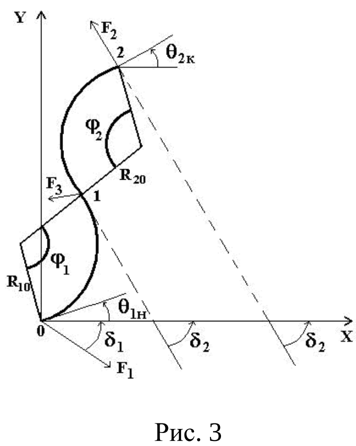


Рис. 3

Производные $d\theta/ds = 1/R$ и $d\theta_0/ds = 1/R_0$ определяют с учетом знака кривизну и радиус кривизны нити в данной точке в деформированном и в недеформированном состояниях образца. Если, например, угол θ растет с увеличением s (участок 0-1 на рис.3), кривизна и радиус кривизны считаются положительными, если, наоборот, угол θ уменьшается с увеличением s (участок 1-2 на рис.3), они считаются отрицательными.

Производные $d^2\theta/ds^2 = d(d\theta/ds)/ds$ и $d^2\theta_0/ds^2 = d(d\theta_0/ds)/ds$ показывают, как быстро меняется первая производная (кривизна нити) по мере увеличения s.

В качестве исходной модели повторяющегося элемента используем плоскую геометрическую модель, состоящую из чередующихся частей окружностей разного радиуса и отрезков прямых линий. Такая модель наиболее универсальна и может описать практически любую форму рассматриваемого элемента. Для каждой части повторяющегося элемента (участка элемента) составляется уравнение (1) и, учитывая, что кривизна каждого участка в исходном состоянии одинакова в разных его местах $d^2\theta_0/ds^2 = d(d\theta_0/ds)/ds = d(1/R_0)/ds = 0$, вместо уравнения (1) будем иметь:

$$d^2\theta/ds^2 = -(F/H)\sin(\theta+\delta). \qquad (2)$$

Для решения уравнения (2) необходимо задать два граничных условия, например, значения углов θ в начальной и конечной точках рассматриваемого участка или значения угла θ в начальной точке участка и производной $d\theta/ds$ в конечной точке участка и т.п. Решение этого уравнения можно получить, например, методом так называемых эллиптических параметров, методом упругих параметров или с помощью довольно сложного и громоздкого пакета математических программ, описанных в [1]. Наиболее удобным из перечисленного является использование математических программ, поскольку оно не требует от пользователя специальных математических знаний. После выхода работы [1] (1986 г.) методы программирования очень сильно развились, появилось много математических пакетов, значительно облегчающих программирование и уменьшающих объем программ. Поэтому решение краевой задачи проводилось не по программам, описанным в [1], а по программе, разработанной нами на основе математического пакета MATLAB, которая значительно менее сложная и менее громоздкая, чем программы, описанные в [1].

Обычно повторяющийся элемент в исходном состоянии образца состоит из нескольких различных участков. Как указывалось выше, дифференциальное уравнение (2) упругой линии составляется для каждого участка, затем записываются 2 условия связи на стыках этих участков, что дает необходимое и достаточное число уравнений для решения задачи, то есть находится зависимость угла θ от s. После нахождения этой зависимости определяется численная связь между координатами x и y отдельных точек повторяющегося элемента как в недеформированном, так и в деформированном состояниях образца, вычерчивается форма данного элемента в обоих состояниях и рассчитывается относительная деформация этого элемента, а следовательно, и образца.

В качестве примера опишем программу расчета деформации повторяющегося элемента, состоящего первоначально (до деформации образца) из двух окружностей радиусами R_{10} и R_{20}, идущих друг за другом и закручивающихся в противоположные стороны. Угол раскрытия первой окружности φ_1, второй φ_2 (рис.3). Углы измеряются в радианах. Первая окружность имеет длину $L_1=\varphi_1*abs(R_{10})$, вторая $L_2=\varphi_2*abs(R_{20})$ (здесь учитывается, что R_{10} и R_{20} могут быть отрицательными, а длины L_1 и L_2 должны быть положительными). Общая длина двух окружностей $L=L_1+L_2$.

Уравнение должно быть записано отдельно для каждой окружности с учетом того, что для них значения F и δ могут отличаться. Величина s для первой окружности меняется от 0 до L_1, а для второй – от L_1 до $L=L_1+L_2$.

На рис. 3 F_1 – сила, действующая на начало первого участка; F_2 – действующая на конец второго участка; F_3 – действующая в точке соединения двух участков. Если рассматривать отдельно второй участок, то из условия равновесия сил следует, что на его начало будет действовать сила, равная по величине F_2, но противоположно ей направленная, то есть направленная вдоль пунктирной линии от точки 1 к оси X. Там же показан угол δ_2. Если сила F_3 отсутствует, то $F_1=F_2$, $\delta_1=\delta_2$. Величины сил и их направления определяются, исходя из структуры материала и величины сил, деформирующих его. Следует отметить, что если появляется дополнительная сила F или момент силы M, приложенные, например, к какой-либо точке участка 0-1, то повторяющийся элемент 0-2 должен быть разделен не на два, а на три участка.

Для упрощения программы перейдем от s к новой переменной τ. Выберем ее так, чтобы на каждой окружности она бы менялась от 0 до 1. Для этого для первой окружности примем $\tau=s/L_1$ (в этом случае при $s=0$ $\tau=0$, а при $s=L_1$ – $\tau=1$), а для второй $\tau=(s-L_1)/L_2$ (при $s = L_1$ $\tau=0$, при $s=L$ – $\tau=1$). При этом переходе вместо $d\theta/ds$ будем использовать $d\theta/d\tau$. Тогда для первой окружности, как нетрудно показать, $d\theta_1/d\tau=L_1/R_1$, а для второй $d\theta_2/d\tau=L_2/R_2$.

Обозначим $\theta_1=y_1$, $d\theta_1/d\tau=y_2$, $A_1 = =F_1L_1^2/H$, $\theta_2=y_3$, $d\theta_2/d\tau=y_4$, $A_2=F_2L_2^2/H$. Тогда после небольших преобразований уравнение (2) для первой и второй окружностей будет иметь соответственно вид:

$$dy_2/d\tau=-A_1\sin(y_1+\delta_1);$$
$$dy_4/d\tau= - A_2\sin(y_3+\delta_2). \qquad (3)$$

Далее записываем краевые условия для начала и конца повторяющегося элемента (для начала первого участка и конца второго) и условие стыковки участков (оно является краевым условием для конца первого участка и для начала второго).

После решения записанных уравнений программа определяет форму повторяющегося элемента до и после деформации образца, и относительную деформацию элемента по осям X и Y. Это и будет относительной деформацией образца в этих направлениях. В тексте программы вместо y_1, y_2, y_3, y_4 используются обозначения y(1), y(2), y(3), y(4).

В заключение следует отметить, что данная программа применима только в том случае, если точки приложения сил и моментов сил относительно нити практически не перемещаются. Это условие, как правило, не выполняется при одноосной деформации ряда материалов, например, трикотажа, но обычно достаточно хорошо выполняется при его двумерной деформации.

ВЫВОДЫ

В большинстве текстильных материалов имеется повторяющийся элемент, относительная деформация которого соответствует относительной деформации всего образца. Описана программа, основанная на математическом пакете MATLAB, позволяющая определить форму повторяющегося элемента после деформации и рассчитать относительную деформацию такого элемента при деформации образца, а следовательно, рассчитать относительную деформацию самого образца.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Е.П.* Теория и расчет упругих стержней. – М.: Наука, 1986. С. 294.

Рекомендована кафедрой технологии трикотажного производства. Поступила 10.09.10.