УДК 677.4.074:539.4

# ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ НИТИ ОСНОВЫ НА ТКАЦКОМ СТАНКЕ

# CALCULATION OF LONG DURABILITY CRITERIA UNDER WARP THREADS TENSION ON A WEAVING LOOM

*В.П. ЩЕРБАКОВ, А.П. БОЛОТНЫЙ, И.Б. ЦЫГАНОВ, Т.И. ПОЛЯКОВА*
*V.P. SHCHERBAKOV, A.P. BOLOTNY, I.B. TSYGANOV, T.I. POLJAKOVA*

**(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина**
**Костромской государственный технологический университет)**
**(Moscow State Textile University "A.N. Kosygin",**
**(Kostroma State Technological University))**
E-mail: office@msta.ac.ru

***Рассмотрено накопление повреждений в основной нити на ткацком станке на основе теории длительной прочности А.А. Ильюшина. Показано, что в отличие от принципа линейного суммирования полная повреждаемость не может быть определена в виде произведения числа циклов на единичную повреждаемость в течение одного цикла.***

***Accumulation of damages of a warp thread on a weaving loom on the basis of the long durability theory of A.A. Iljushin is considered. Unlike the principle of linear summation the full damaging can not be determined as a product of a cycles number on individual damaging during one cycle.***

**Ключевые слова: длительная прочность, критерий прочности, напряжение, деформация, повреждаемость, циклические нагружения, ткацкий станок, линейное и нелинейное суммирование повреждений.**

**Keywords: long durability, a durability criterion, tension, deformation, damaging, cycle loadings, a loom, linear and nonlinear summation of damaging.**

В механике деформируемого твердого тела известны два типа критериев макроскопического разрушения. Первый базируется на представлении о существовании некоторого порогового, критического напряжения, по достижении которого одной из компонент тензора напряжений разрушение наступает мгновенно. Предельное для данного материала напряжение принимается за критерий прочности. На таком представлении явления прочности основаны все классические теории и критерии прочности, и их модификации. Второй подход исходит из того, что материалы, нагруженные статическим напряжением, разрушаются со временем, при этом время разрушения уменьшается с увеличением напряжения. Это явление называют "статической усталостью", "разрушением вследствие ползучести", "задержанным разрушением", "длительной прочностью" и т.п.

В практических приложениях чаще всего приходится оценивать прочность нитей при напряжениях, определенным образом меняющихся во времени. Поэтому необходимо установить закономерности длительной прочности при одноосном напряженном состоянии при переменном нагружении.

Рассмотрим вначале случай, когда напряжения изменяются ступенчато. Располагая этими данными, можно установить, что при действии напряжения $\sigma_1$ разрушение произойдет по прошествии времени $t_*^{(1)}$, напряжению $\sigma_2$ соответствует время до разрушения $t_*^{(2)}$, и т. д., на i-м шаге нагружения значению $\sigma_i$ соответствует время $t_*^{(i)}$. Если окажется, что время действия напряжения $\sigma_i$ больше или равно $t_*^{(i)}$, то произойдет разрушение. Если $\Delta t_i < t_*^{(i)}$, то разрушение не наступит и за время $\Delta t_i$ исчерпается лишь часть несущей способности нити, равной отношению $\frac{\Delta t_i}{t_*^{(i)}}$. Используем для обозначения отношения $\frac{\Delta t_1}{t_*^{(1)}}$, $\frac{\Delta t_2}{t_*^{(2)}}$, ..., $\frac{\Delta t_i}{t_*^{(i)}}$ давно установившийся термин "повреждаемость" на первой, второй, i-й ступенях нагружения.

Экспериментальные исследования длительной прочности, проведенные при переменных режимах нагружения, показали, что во многих случаях разрушение происходит, когда сумма повреждаемостей становится равной единице:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta t_i}{t_*^{(i)}(\sigma_i)} = 1.$$

Этот экспериментально установленный факт называют условием (принципом) линейного суммирования повреждаемостей. Впервые этот принцип был сформулирован Бейли, и поэтому его часто называют принципом Бейли.

Если напряжение в исследуемом интервале изменяется непрерывно, то, переходя от суммы к интегралу, получим:

$$\int_0^{t_*} \frac{dt}{t_0\left[\sigma(t)\right]} = 1, \qquad (1)$$

где $t_0$ – время до разрушения при постоянных напряжениях, равных мгновенным значениям $\sigma(t)$.

Одним из основных понятий развивающегося во времени феноменологического процесса разрушения является долговечность – время, необходимое для разрушения образца при постоянном напряжении. При исследовании долговечности материала испытывают несколько одинаковых образцов при различных напряжениях и устанавливают время, необходимое для разрушения каждого образца. По результатам испытаний строят график зависимости времени до разрушения $t_*$ при постоянном напряжении $\sigma_0$ от уровня этого напряжения (рис. 1 – график долговечности).

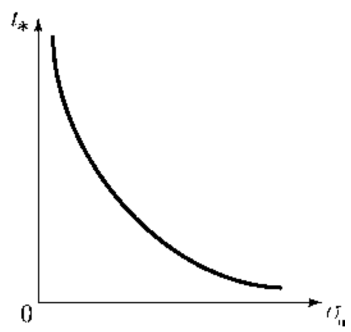


Рис. 1

При аппроксимации $t_* = t_*(\sigma_0)$ часто используется степенная зависимость:

$$t_* = B\sigma_0^{-b}. \qquad (2)$$

На кафедре МТВМ МГТУ им. А.Н. Косыгина разработан способ и создана установка для измерения времени до разрушения нити на основе испытательной машины FP-100/1. Сама установка, способ нагружения нити постоянной нагрузкой, методика измерения времени до разрушения описаны в [1]. Испытанию подвергнута хлопчатобумажная пряжа линейной плотности Т = 29 текс при трех уровнях нагрузок. Каждой u-й величине нагрузки соответствуют 30 опытов. Напряжения $\sigma$ в ГПа определены по формуле $\sigma=\frac{P}{T}\rho$, где $\rho$ – плотность пряжи, г/см$^3$. Общепринятым при решении задач выравнивания или сглаживания является метод наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(t_{*i}-B\sigma_{0i}^{-b}\right)^2 ®\min. \qquad (3)$$

Решение оптимизационной задачи дает B = 7,781·10$^{12}$; b = 12,558/

Определим изменение со временем степени накопленных повреждений в случаях, когда диаграмма циклов имеет вид трапеции, как, например, при зевообразовании на ткацком станке, а также циклов пилообразной формы (прибой утка к опушке ткани) (рис. 2 – циклы трапецеидальной формы).

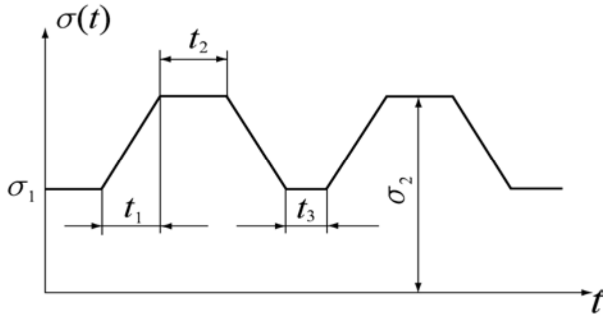


Рис. 2

В этом случае при условии Бейли (1) для степенного закона долговечности (2) функция повреждаемости после N циклов нагружения в течение времени t = NП равна [1], [2]:

$$\omega(t)=\frac{N}{B}\int_0^{\Pi}\sigma^b(\xi)d\xi \qquad (4)$$

или

$$\omega(t)=\frac{N}{B}\left\{\int_0^{t_1}(\sigma_1+\dot{\sigma}\xi)^b d\xi+\sigma_2^b t_2+\int_{t_1+t_2}^{2t_1+t_2}\left[\sigma_2-\dot{\sigma}(\xi-t_1-t_2)\right]^b d\xi+\sigma_1^b t_3\right\}.$$

Выполняя интегрирование, получим:

$$\omega(t)=\frac{N}{B}\left[2t_1\frac{\sigma_2^{1+b}-\sigma_1^{1+b}}{(1+b)(\sigma_2-\sigma_1)}+\sigma_1^b t_3+\sigma_2^b t_2\right]. \qquad (5)$$

Если в (5) положить $t_2=t_3=0,$ то получим циклы пилообразной формы. В этом случае формула для функции повреждаемости для времени $t=2Nt_1$ будет иметь вид

$$\omega(t)=\frac{2Nt_1}{B}\left[\frac{\sigma_2^{1+b}-\sigma_1^{1+b}}{(1+b)(\sigma_2-\sigma_1)}\right]. \qquad (6)$$

Необходимо обратить внимание на построение исходной функции (4), полученной в виде произведения числа циклов N на повреждаемость за время $\Pi$ одного цикла. Такая структура $\omega(t)$ возможна только вследствие принципа линейного суммирования в интеграле Бейли. В.В. Москвитин построил соотношения нелинейной вязкоупругости с учетом степени накопленных повреждений [1], [3]. Полученная им формула

$$\frac{B^{1+n}}{1+n}=\int_0^{t_*}(t_*-\tau)^n\sigma^{b(1+n)}(\tau)d\tau \qquad (7)$$

является критерием длительной прочности, определяющим время до разрушения $t_*$ при заданном законе нагружения $\sigma(t)$ и экспериментально определяемой функции долговечности $t_*=t_*(\sigma_0)$.

Теория прочности А.А. Ильюшина [1], [4] в случае одноосного напряженного состояния приводит к предельному соотношению вида

$$bB^{\frac{1}{b}}=\int_0^{t_*}\left(t_*-\tau\right)^{\frac{1}{b}-1}\sigma\left(\tau\right)d\tau\,. \qquad (8)$$

Легко видеть, что при n =0 критерий В.В. Москвитина превращается в критерий линейного суммирования повреждаемостей Бейли. Таким образом, введением одной постоянной n удается учесть влияние истории нагружения в определенном условии длительной прочности.

Покажем теперь область применения и некоторые особенности условий прочности В.В. Москвитина, написанных в виде (7), при частных видах нагружения [1], [5].

1. Напряжение σ(t) изменяется со временем по закону

$$\begin{aligned}\sigma\left(t\right)&=\sigma_{01}=\text{const}\quad \text{при}\quad 0\le t\le t_1,\\ \sigma\left(t\right)&=\sigma_{02}=\text{const}\quad \text{при}\quad t>t_1.\end{aligned}$$

При этом из критерия прочности (7) следует:

$$1=\frac{\left(t_1+t_2\right)^{1+n}-t_2^{\ 1+n}}{t_{01}^{\ 1+n}}+\frac{t_2^{\ 1+n}}{t_{02}^{\ 1+n}}, \qquad (9)$$

где $t_2=t_*-t_1$, $t_{01}=t_{01}(\sigma_{01})$, $t_{02}=t_{02}(\sigma_{02})$.

При n = 0 имеем:

$$1=\frac{t_1}{t_{01}}+\frac{t_2}{t_{02}}. \qquad (10)$$

Как видно, в отличие от правила линейного суммирования Бейли, справедливого, как уже отмечалось, при n = 0, в общем случае при n≠0 имеет место правило нелинейного суммирования, при этом отклонение от (9) может быть в ту или другую сторону и зависит от того, происходит ли при $t=t_1$ увеличение или уменьшение напряжений.

2. Напряжение σ(t) изменяется по программе:

$$\begin{aligned}\sigma\left(t\right)&=\sigma_0=\text{const}\quad \text{при}\quad 0\le t\le t_1,\\ \sigma\left(t\right)&=0\quad \text{при}\quad t>t_1.\end{aligned} \qquad (11)$$

Введем функцию повреждаемости $\omega\left(t\right)$ с использованием формулы:

$$\omega\left(t\right)=\left(1+n\right)\int_0^t\left(t-\tau\right)^n\frac{d\tau}{t_0^{\ 1+n}\left(\sigma\right)} \qquad (12)$$

и определим изменение со временем степени накопленных повреждений. Для программы нагружения (11) находим:

$$\begin{aligned}&\frac{\omega\left(t\right)}{\omega\left(t_1\right)}=\left(\frac{t}{t_1}\right)^{1+n},\ t\le t_1,\\ &\frac{\omega\left(t\right)}{\omega\left(t_1\right)}=\left(\frac{t}{t_1}\right)^{1+n}-\left(\frac{t}{t_1}-1\right)^{1+n},\ t>t_1.\end{aligned} \qquad (13)$$

Из графиков функций (13), представленных на рис. 3 (степень накопленных повреждений при нагружении ($0<t\le t_1$) и после удаления нагрузки ($t>t_1$)), видим, что при n = 0 повреждения, накопившиеся к моменту снятия нагрузки $t=t_1$, сохраняются неизменными все последующее время $t>t_1$. Если же $n<0$, то при $t>t_1$ число накопленных повреждений уменьшается и при $t>>t_1$ они исчезают полностью. Таким образом, критерий В. В. Москвитина описывает известное явление "отдыха" ("залечивания"), которое наблюдается в действительности. Теория прочности А.А. Ильюшина в точности совпадает с критерием В.В. Москвитина при условии, что в (7) величина $b\left(1+n\right)$ равна единице. Тогда в нашем случае $n=\frac{1}{b}-1=-0{,}92$. Понятно, что в отличие от принципа линейного суммирования Бейли полная повреждаемость за N циклов не может быть определена, как это обычно приходится видеть, в виде произведения числа циклов N на единичную повреждаемость $\omega_1(t)$ в течение одного цикла.

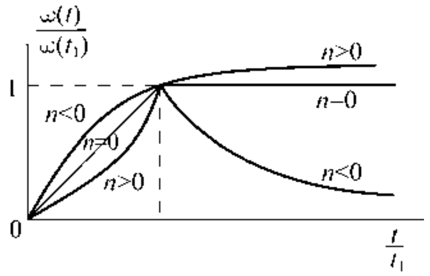


Рис. 3

Рассмотрим накопление повреждений в основной нити на ткацком станке. Технологический процесс формирования ткани характерен периодическим нагружением нити при ее движении от навоя до опушки ткани. Рассматривая изменение натяжения нити на тензограмме, отметим, что возрастание натяжения нити, как и спад его при высокой частоте нагружения, свойственной ткацким станкам, происходит с большой скоростью. Натяжение достигает двух локальных максимумов – при зевообразовании и прибое, один из которых – при прибое, является глобальным. Принимая нагружение при зевообразовании трапецеидальным, при прибое – пилообразным с частотой 1/П, получим циклы, изображенные на рис. 4 (схема нагружения основной нити на ткацком станке).

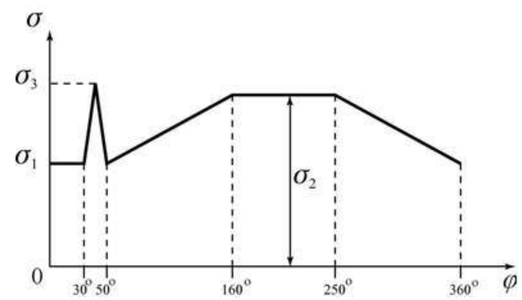


Рис. 4

Если воспользоваться предельным условием А.А. Ильюшина при том же степенном законе долговечности, то получим для функции повреждаемости:

$$\omega(t)=\frac{1}{B^{\alpha}}\left[\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\Pi}^{k\Pi}(t-\tau)^{\alpha}d\sigma_k(\tau)+\sigma_1 N^{\alpha}\Pi^{\alpha}\right]. \quad (14)$$

Проведем интегрирование, вычислим конечные суммы по формулам Каталана [6]:

$$2\sum_{k=1}^{N}(N-k+1)^{\alpha}=\int_{1}^{N}(N-k+1)^{\alpha}\,dk+\int_{0}^{N-1}(N-k+1)^{\alpha}\,dk=$$
$$=(1+\alpha)^{-1}\left[N^{1+\alpha}+(N+1)^{1+\alpha}-2^{1+\alpha}-1\right] \quad (15)$$

и получим алгебраическое выражение для ω(t):

$$\omega(t)=\frac{1}{B^{\alpha}}\left\{\frac{2f(N)}{1+\alpha}\left[(\sigma_2-\sigma_1)\Pi_Z^{\alpha}+(\sigma_3-\sigma_1)\Pi_P^{\alpha}\right]+\sigma_1\left(t_{\Sigma}-Nt_{ZV}\right)^{\alpha}+\sigma_2 N^{\alpha}t_{ZV}^{\alpha}\right\}. \quad (16)$$

Здесь введены обозначения:

$$f(N)=\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{1}{2^{\alpha}}+\dfrac{2N^{2+\alpha}+(N+1)^{2+\alpha}-2-2^{2+\alpha}+\dfrac{2}{2^{2+\alpha}}}{2(2+\alpha)}+\\ +\dfrac{-2\left(N-\dfrac{1}{2}\right)^{2+\alpha}+2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2+\alpha}-2\left(N+\dfrac{1}{2}\right)^{2+\alpha}+(N-1)^{2+\alpha}}{2(2+\alpha)}\end{array}\right];$$

$t_\Sigma$ – общее время движения индивидуальной точки нити основы от навоя до опушки ткани; $t_{ZV}$ – время выстоя ремизки при зевообразовании; $\Pi_Z, \Pi_P$ – время подъема (опускания) ремизки и соответственно время прибоя.

Вычислим повреждаемость основной нити на станке СТБ при изготовлении ткани полотняного переплетения, выработанной из хлопчатобумажной пряжи линейной плотности Т = 29 текс. Технологические параметры заправки станка предоставлены доцентом кафедры МТВМ МГТУ им. А.Н. Косыгина А.А. Ликучевой. Если заправочное натяжение нити $P_1$=30 сН, натяжение при полном открытии зева $P_2 = 40$ сН, при прибое $P_3 = 90$ сН, то соответствующие напряжения, определенные по формуле $\sigma = \frac{P}{T}\rho_{нити}$ ($\rho_{нити}$ – плотность нити) равны: $\sigma_1$ = 0,931 кгс/мм$^2$; $\sigma_2$=1,242; $\sigma_3$ = 2,8

Особое внимание следует обратить на величину натяжения при прибое. Экспериментально измеренное тензорезистором натяжение дает величину $P_{3Э} = 45$ сН. При сравнительно небольшой частоте вращения 360 мин$^{-1}$ время прибоя составляет 4,63 микросекунды. Опыт показывает, что сопротивление материалов быстро меняющимся деформациям отлично от сопротивления деформациям, протекающим медленно, "статически". При измерении деформаций или напряжений, когда скорость деформации становится большой, возникают огромные трудности. Дело в том, что механические возмущения в нити распространяются с конечной скоростью в виде волн. При малой скорости нагружения эти волны много раз пробегают туда и обратно вдоль нити, так что напряженное и деформированное состояние в целом однородно. При большой же скорости нагружения деформация переменна по длине нити и во времени. Тогда деформация, вычисляемая как отношение абсолютного удлинения к длине нити, не отражает состояние нити даже в среднем, а скорость деформации $\dot{\varepsilon}$, вычисляемая как частное от деления скорости изменения расстояния между концами нити на ее длину, не является истинной скоростью деформации. Для иллюстрации очень существенной зависимости величины деформации от скорости нагружения приведем решение задачи движения упругой системы с одной степенью свободы. Эту систему представим в виде массы m, закрепленной на упругой нити для вертикального перемещения x. Уравнение движения, включающее силу инерции $m\ddot{x}$, имеет вид:

$$-cx - m\ddot{x} + f(t) = 0,$$

где f(t) – внешняя сила, изменяющаяся во времени по заданному закону; c – коэффициент жесткости нити.

При мгновенном приложении постоянной силы f получаем решение уравнения

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{f}{c}.$$

При начальных условиях $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ имеем $C_1$=0, $C_2 = \frac{f}{c}$. Тогда $x = \frac{f}{c}(1 - \cos \omega t)$. Колебания, таким образом, происходят от нуля до максимума $\frac{2f}{c}$, равного удвоенному статическому перемещению от силы f. Следовательно, при мгновенном приложении постоянной нагрузки расчетные деформации и напряжения следует удваивать по сравнению со случаем медленного нагружения той же силой. Конечно, приведенный пример является лишь иллюстрацией *невозможности* измерения напряжений и деформаций методами и средствами обычной тензометрии. Исследование механических свойств материалов и процессов при высоких скоростях деформации приводит к необходимости исследования процесса распространения волн [7], [8].

Теперь перейдем к числовому расчету функции повреждаемости. При длине заправочной линии от точки схода нити основы с навоя до опушки ткани 1,34 м, плотности ткани по утку 280 нитей на дециметр и уработке по основе 6% имеем N=3992 цикла. Воспользовавшись формулой (16), мы получаем, таким образом, $\omega\left(t_{\Sigma}\right)=0,399$. Следовательно, можно считать, что нить в ткачестве исчерпала лишь часть своей прочности, причем не такую значительную, чтобы говорить о разрыве нити.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В.П., Скуланова Н.С.* Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов: Монография. – М., 2008.

2. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. – М.: Издательство Московского университета, 1975.

3. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. – М.: Наука, 1972.

4. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970.

5. *Москвитин В.В.* Циклические нагружения элементов конструкций. – М.: Наука, 1981.

6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971.

7. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1959.

8. *Белл Ф. Дж.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. – В 2-х частях. – М.: Наука, 1984.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов МГТУ им. А.Н. Косыгина. Поступила 01.09.11.