УДК 677.051.128

УПРОЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФРИКЦИОННЫХ НАМОТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ РЫЧАЖНОГО ТИПА И ЕЕ АНАЛИЗ МЕТОДАМИ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

THE SIMPLIFIED MATHEMATICAL MODEL FOR RESEARCH OF NONLINEAR VIBRATIONS OF FRICTION WINDING LEVERAGE MECHANISMS AND ITS ANALYSIS BY THE METHODS OF THE QUALITATIVE THEARY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Г.И. ЧИСТОБОРОДОВ, Д.С. МАЛЕЕВ, С.Г. СТЕПАНОВ
G.I. CHISTOBORODOV, D.S. MALEEV, S.G. STEPANOV

(Ивановская государственная текстильная академия,
Ивановский государственный архитектурно-строительный университет)
(Ivanovo State Textile Academy;
Ivanovo State University of Civil Engineering and Architecture)
E-mail: ttp@igta.ru

В работе установлено, что взаимодействие вынужденных колебаний и автоколебаний качественно и количественно изменяет характер колебаний фрикционных намоточных механизмов.

It is established that interaction of forced vibrations and avtovibrations changes the character of the vibrations of friction winding mechanisms qualitatively and quantitatively.

Ключевые слова: фрикционные намоточные механизмы, нелинейные колебания, математическая модель.

Keywords: friction winding mechanisms, nonlinear vibrations, forced vibrations, avtovibrations, a mathematical model.

В [1] получена математическая модель (22) для исследования нелинейных колебаний фрикционных намоточных механизмов рычажного типа. Ввиду сложности полученной математической модели ее точное аналитическое решение в общем виде получить практически невозможно, а получение приближенного аналитического решения крайне затруднительно.

Рассмотрим частный случай, вытекающий из полученной математической модели [1 (22)], в результате введения следующих упрощающих допущений:

1) отбросим в правых частях уравнений члены, содержащие в качестве множителей $\ddot{\phi}$, так как в области рабочих и критических скоростей $\ddot{\phi} << \dot{\phi}$;

2) пренебрежем нелинейной составляющей упругой силы контактного взаимодействия между телом намотки и фрикционным цилиндром [1 (6)], то есть примем $\gamma = 0$;

3) считаем, что демпфирование в системе отсутствует;

4) пренебрежем в четвертом и в пятом уравнениях системы гироскопическими членами, так как для большинства бобинодержателей полярный момент инерции C намного меньше экваториального момента инерции A(C/A = 0,02 – 0,03) и влияние C на динамику намоточного механизма незначительно;

5) будем рассматривать колебание системы относительно положения статического равновесия, что позволяет исключить из уравнений силы веса рычага, рото-

ра и статическую составляющую упругой силы контактного взаимодействия между телом намотки и фрикционным цилиндром;

6) в последнем уравнении системы пренебрежем взаимным влиянием колебательного и вращательного движений, а также величиной радиальной деформации тела намотки $W_{/\ell=0,5b_1}$ по сравнению с текущими значениями радиуса тела намотки $R_1(\varphi)$;

7) рассмотрим частный случай, когда $\Psi_O = \pi/2$, $L\sin\Psi_O = Y_O$, $X_O>0$, где X_O, Y_O – координаты оси фрикционного цилиндра;

8) считаем, что наряду с трением качения во всей зоне контакта между телом намотки и фрикционным цилиндром возможна реализация силы трения скольжения.

С учетом принятых допущений математическая модель [1 (22)] принимает вид:

$$
\begin{gathered}
J\ddot{\psi} + (c_\Pi L_1^2 + m_1 L^2)\psi + m_1 L\eta - m_2 L\alpha_1 = 0, \\
M\ddot{\zeta} + m_1\zeta - m_2\beta_1 = Me\dot{\phi}^2 \sin\phi + fF_1T(U), \\
M\ddot{\eta} + (m_1 + cb_1)\eta + (cd - m_2)\alpha_1 + m_1 L\psi = Me\dot{\phi}^2\cos\phi + cb_1\lambda_1\cos(\phi + \nu_1), \\
A\ddot{\beta}_1 + m_3\beta_1 - m_2\zeta = -(C - A)\delta\dot{\phi}^2\cos(\phi - \varepsilon) + fK_1T(U), \\
A\ddot{\alpha}_1 + (cp + m_3)\alpha_1 + (cd - m_2)\eta - m_2 L\psi = (C - A)\delta\dot{\phi}^2\sin(\phi - \varepsilon) + cd\lambda_1\cos(\phi + \nu_1), \\
C\ddot{\phi} + M_C = fF_1T(U)R_1(\phi),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $T(U) = \mathrm{sgn}U - \alpha_1^* U + \alpha_3^* U^3$; $U = V_\Phi - \dot{\phi}R_1(\phi) - \dot{\zeta} - d_0\dot{\beta}_1$;
$V_\Phi = R_2\omega_\Phi$; $F_1 = cb_1[\rho_0 + \lambda_1\cos(\phi + \nu_1) + \eta + d_0\alpha_1]$;
$K_1 = cb_1\{d_0[\rho_0 + \lambda_1\cos(\phi + \nu_1) + \eta] + p_0\alpha_1\}$;
$d_0 = 0{,}5b_1 - \ell_0$; $\rho_0 = R_1 + R_2 - a_1$; $d = b_1 d_0$;
$p = b_1 p_0$; $p_0 = \frac{b_1^2}{3} - b_1\ell_0 + \ell_0^2$.

Анализ системы уравнений (1) показывает, что она может быть разделена на две системы уравнений. Одна система включает первое, третье и пятое, а другая – второе, четвертое и шестое уравнения системы (1). В первую систему входят линейные дифференциальные уравнения, описывающие вынужденные колебания рычага, линейные и угловые колебания ротора в направлении оси $O_2\eta$ (горизонтальная плоскость). Вторая система, состоящая из нелинейных дифференциальных уравнения, описывает колебания ротора в направлении оси $O_2\zeta$ (вертикальная плоскость), а также колебания угловой скорости вращения тела намотки $\dot{\phi}$. Вторая система зависит от первой, так как от координат η и α_1 зависят величины силы F_1 и момента K_1 контактного взаимодействия между телом намотки и фрикционным цилиндром, от которых, в свою очередь, зависят нелинейные сила трения и момент трения, входящие в правые части уравнений второй системы.

Будем считать, что скорость $\dot{\phi}$ в течение периода колебаний изменяется незначительно. В этом случае угловая скорость вращения ротора может быть представлена в виде: $\dot{\phi} = \omega + \mu\Delta\dot{\phi}$, где $\mu\Delta\dot{\phi}$ – малые вибрационные члены; μ – малый положительный параметр; ω – средняя скорость. Считая, что в системе генерируется близкое к равномерному вращению движение со средней скоростью ω, и пренебрегая в первой системе уравнений малыми вибрационными членами, получим:

$$
\begin{gathered}
J\ddot{\psi} + (c_\Pi L_1^2 + m_1 L^2)\psi + m_1 L\eta - m_2 L\alpha_1 = 0, \\
M\ddot{\eta} + (m_1 + cb_1)\eta + (cd - m_2)\alpha_1 + m_1 L\psi = Me\omega^2\cos\omega t + cb_1\lambda_1\cos(\omega t + \nu_1), \\
A\ddot{\alpha}_1 + (cp + m_3)\alpha_1 + (cd - m_2)\eta - m_2 L\psi = (C - A)\delta\omega^2\sin(\phi - \varepsilon) + cd\lambda_1\cos(\omega t + \nu_1).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Решение системы (2) не вызывает затруднений. В соответствии с видом возбуждения ее решение для каждой из обобщенных координат имеет вид:

$$\Psi = A_1\cos\omega t+B_1\sin\omega t,\ \eta = A_2\cos\omega t+B_2\sin\omega t,\ \alpha_1= A_3\cos\omega t+B_3\sin\omega t. \quad (3)$$

Подставляя эти решения в уравнение (2) и приравнивая нулю суммы членов, содержащих множители sinωt и cosωt, получаем две зависимые системы линейных алгебраических уравнений, которые в итоге следует объединить в одну общую систему. Из решения этой общей системы алгебраических уравнений, которое может быть получено, например, при помощи правила Крамера, легко определяются амплитуды $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$, $A_3(\omega)$, $B_1(\omega)$, $B_2(\omega)$, $B_3(\omega)$.

Рассмотрим теперь вторую систему уравнений. Предполагая, что нелинейные силовые факторы малы, в систему формально введем малый положительный параметр μ, который впоследствии будет принят равным единице, и преобразуем систему к виду:

$$\begin{gathered}\ddot{\zeta}+n_1^2\zeta+D_1\beta_1=e\dot{\phi}^2\sin\phi+\mu M^{-1}fF_1T(U),\\ \ddot{\beta}_1+n_2^2\beta_1+E_1\zeta=D_2\dot{\phi}^2\sin\phi+E_2\dot{\phi}^2\cos\phi+\mu A^{-1}fK_1T(U),\\ \ddot{\phi}=\mu C^{-1}\left[-M_C+fF_1T(U)R_1(\phi)\right],\end{gathered} \quad (4)$$

где $n_1^2=\dfrac{m_1}{M}$; $n_2^2=\dfrac{m_3}{A}$; $D_1=-\dfrac{m_2}{M}$; $E_1=-\dfrac{m_2}{A}$;

$D_2=\dfrac{(A-C)\delta\sin\varepsilon}{A}\approx\delta\sin\varepsilon$; $E_2=\dfrac{(A-C)\delta\cos\varepsilon}{A}\approx\delta\cos\varepsilon$;

$M_C=H(\dot{\phi})+\left[f_K-\lambda_1\cos(\phi-\nu_1)\right]F_1$; $H(\dot{\varphi})$ – составляющая момента сил сопротивления вращению тела намотки, равная сумме моментов сил трения в подшипниках качения и сил аэродинамического сопротивления при вращении тела намотки [1].

Рассмотрим случай, когда нормальные частоты линейной системы далеки от частоты внешней силы.

При μ = 0 решение первых двух уравнений системы (4) имеет вид:

$$\begin{gathered}\zeta=a\sin(k_1t+\theta_1)+b\sin(k_2t+\theta_2)+d_1\sin\varphi+e_1\cos\varphi,\\ \beta_1=\rho_1a\sin(k_1t+\theta_1)+\rho_2b\sin(k_2t+\theta_2)+d_2\sin\varphi+e_2\cos\varphi,\end{gathered} \quad (5)$$

где a, b, θ_1, θ_2 – постоянные интегрирования; k_1,k_2 – нормальные частоты линейной однородной системы, являющиеся корнями уравнения

$$k^4-(n_1^2+n_2^2)k^2+n_1^2n_2^2-D_1E_1=0, \quad (6)$$

из которого следует $k_2^2>n_1^2$, $k_2^2>n_2^2$, $k_1^2<n_1^2$, $k_1^2<n_2^2$; ρ_1, ρ_2 – коэффициенты распределения, определяемые выражениями:

$$\rho_1=-\frac{E_1}{n_2^2-k_1^2}=-\frac{n_1^2-k_1^2}{D_1}>0,$$

$$\rho_2=-\frac{E_1}{n_2^2-k_2^2}=-\frac{n_1^2-k_2^2}{D_1}<0$$

Для амплитуд вынужденных колебаний имеем:

$$d_1=\frac{\dot{\phi}^2[e(n_2^2-\dot{\phi}^2)-D_1D_2]}{\Delta},$$

$$d_2=\frac{\dot{\phi}^2[D_2(n_1^2-\dot{\phi}^2)-E_1e]}{\Delta},$$

$$e_1=-\frac{D_1E_2\dot{\phi}^2}{\Delta},\ e_2=\frac{\dot{\phi}^2(n_1^2-\dot{\phi}^2)E_2}{\Delta},$$

$$\Delta=\dot{\phi}^4-(n_1^2+n_2^2)\dot{\phi}^2+n_1^2n_2^2-D_1E_1.$$

Предположим, что корни уравнения (6) k_1 и k_2 не равны друг другу ($k_2>k_1$) и ни один из них не равен нулю.

Решение первых двух уравнений системы (4) при μ≠0 будем искать в форме (5), считая, что a, b, θ_1, θ_2 – медленно меняющиеся функции времени. Для третьего уравнения системы (4) принимаем $\dot{\phi} = \varpi$. Используя принятые решения как формулы замены переменных, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{k_1\rho_1(k_2^{\,2} - k_1^{\,2})}(E_1 f^* + D_1\rho_1 q^*)\cos\psi_1, \\
&\frac{db}{dt} = \frac{\mu}{k_2\rho_2(k_2^{\,2} - k_1^{\,2})}(E_1 f^* + D_1\rho_2 q^*)\cos\psi_2 \\
&a\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\mu}{k_1\rho_1(k_2^{\,2} - k_1^{\,2})}(E_1 f^* + D_1\rho_1 q^*)\sin\psi_1, \\
&b\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{\mu}{k_2\rho_2(k_2^{\,2} - k_1^{\,2})}(E_1 f^* + D_1\rho_2 q^*)\sin\psi_2, \\
&\frac{d\varpi}{dt} = \mu C^{-1}[-M_C(\varpi, \phi) + p^*],
\end{aligned} \qquad (7)$$

где $f^* = M^{-1} fF_1 T(U)$, $q^* = A^{-1} f K_1 T(U)$, $p^* = fF_1 T(U) R_1$, $\Psi_1 = k_1 t + \theta_1$, $\Psi_2 = k_2 t + \theta_2$, $U = V_\phi - \varpi[R_1 + \lambda_1\cos(\varphi + \nu_1)] - ak_1\cos\Psi_1 - bk_2\cos\Psi_2 - d_1\varpi\cos\varphi + e_1\varpi\sin\varphi - d_0(\rho_1 ak_1\cos\Psi_1 + \rho_2 bk_2\cos\Psi_2 + d_2\varpi\cos\varphi - e_2\varpi\sin\varphi)$.

Приближенные решения системы (7) будем искать в виде:

$$a = u + \mu u_1,\ b = \upsilon + \mu\upsilon_1,\ \theta_1 = \Omega_1 + \mu\varphi_1,$$
$$\theta_2 = \Omega_2 + \mu\varphi_2,\ \varpi = \omega + \mu\varphi_3,$$

где μu_1, $\mu\upsilon_1$, $\mu\varphi_1$, $\mu\varphi_2$, $\mu\varphi_3$ – малые вибрационные члены; u, υ, Ω_1, Ω_2, ω – медленно изменяющиеся значения искомых переменных, которые составляют главную часть решения и определяются из системы, получающейся после усреднения правых частей уравнений (7) по трем периодам $2\pi/k_1$, $2\pi/k_2$, $2\pi/\omega$:

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{k_1\rho_1(k_2^2 - k_1^2)}(E_1F_1^* + D_1\rho_1 G_1^*), \\
&\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\mu}{k_2\rho_2(k_2^2 - k_1^2)}(E_1F_2^* + D_1\rho_2 G_2^*), \\
&\frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{\mu}{k_1\rho_1 u(k_2^2 - k_1^2)}(E_1F_3^* + D_1\rho_1 G_3^*), \\
&\frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{\mu}{k_2\rho_2 \upsilon(k_2^2 - k_1^2)}(E_1F_4^* + D_1\rho_2 G_4^*), \\
&\frac{d\omega}{dt} = \mu C^{-1}(F_5^* + G_5^*),
\end{aligned} \qquad (8)$$

где

$$F_1^* = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*\cos\psi_1 d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$F_2^* = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*\cos\psi_2 d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$F_3^* = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*\sin\psi_1 d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$F_4^* = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*\sin\psi_2 d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$F_5^* = -\frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} M_C(\omega, \phi) d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$G_1^* = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} q^*\cos\psi_1 d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$G_2^* = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} q^*\cos\psi_2 d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$G_3^* = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} q^*\sin\psi_1 d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$G_4^* = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} q^*\sin\psi_2 d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$G_5^* = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} p^*(\omega, \phi) d\psi_1 d\psi_2 d\phi,$$

$$f^* = M^{-1} f\Phi(\omega)T(U),$$

$$q^* = A^{-1} f[W_1(\omega)\cos\phi + V_1(\omega)\sin\phi + c_* d_0]T(U),$$

$$M_C(\omega) = H(\omega) + (f_K - \ell_1\sin\phi - \ell_2\cos\phi)\Phi(\omega),$$

$$\ell_1 = \lambda_1\cos\nu_1,\ \ \ell_2 = \lambda_1\sin\nu_1,\ \ p^*(\omega) = fR_1\Phi(\omega)T(U),$$

$$
\begin{aligned}
&c_* = cb_1\rho_0,\quad \Phi(\omega) = Q_1(\omega)\cos\phi + S_1(\omega)\sin\phi + c_*,\\
&U = V_\phi - \omega R_1 - K_1(\omega)\cos\phi + L_1(\omega)\sin\phi -\\
&-ak_1(1+d_0\rho_1)\cos\psi_1 - bk_2(1+d_0\rho_2)\cos\psi_2,\\
&K_1(\omega) = \omega[\lambda_1\cos\nu_1 + d_1(\omega) + d_0 d_2(\omega)],\\
&L_1(\omega) = \omega[\lambda_1\sin\nu_1 + e_1(\omega) + d_0 e_2(\omega)],\\
&Q_1(\omega) = cb_1[\lambda_1\cos\nu_1 + A_2(\omega) + d_0 A_3(\omega)],\\
&S_1(\omega) = cb_1[-\lambda_1\sin\nu_1 + B_2(\omega) + d_0 B_3(\omega)],\\
&W_1(\omega) = cb_1[\lambda_1 d_0\cos\nu_1 + A_2(\omega)d_0 + A_3(\omega)p_0],\\
&V_1(\omega) = cb_1[-\lambda_1 d_0\sin\nu_1 + B_2(\omega)d_0 + B_3(\omega)p_0].
\end{aligned}
$$

Подставляя вычисленные значения интегралов в уравнения (8), после преобразований получим:

$$
\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = A_0 u[a_0(\omega) - u - 2\upsilon],\\
&\frac{d\upsilon}{dt} = B_0\upsilon[b_0(\omega) - \upsilon - 2u], \qquad (9)\\
&\frac{d\omega}{dt} = c_0(\omega) + \kappa_0(\omega)(u+\upsilon).
\end{aligned}
$$

Выражение переменных u и υ через исходные переменные a и b имеет вид:

$$
u = a^2 k_1^2\chi_1^2 > 0,\quad \upsilon = b^2 k_2^2\chi_2^2 > 0,
$$

$$
\chi_1 = 1 + d_0\rho_1,\quad \chi_2 = 1 + d_0\rho_2.
$$

Остальные величины, входящие в правые части системы (9), имеют значения:

$$
A_0 = \frac{3m_2 f c_* \alpha_3^* \chi_1^2}{4AM\rho_1(k_2^2 - k_1^2)} > 0,
$$

$$
B_0 = -\frac{3m_2 f c_* \alpha_3^* \chi_2^2}{4AM\rho_2(k_2^2 - k_1^2)} > 0,
$$

$$
a_0(\omega) = \frac{4\alpha_1^*}{3\alpha_3^*} - 4\{(V_\phi - \omega R_1)^2 - \frac{V_\phi - \omega R_1}{c_*\chi_1}[K_1(\omega)(Q_1(\omega) + \rho_1 W_1(\omega)) - L_1(\omega)(S_1(\omega) + \rho_1 V_1(\omega))] + 0,5(L_1^2(\omega) + K_1^2(\omega))\},
$$

$$
b_0(\omega) = \frac{4\alpha_1^*}{3\alpha_3^*} - 4\{(V_\varphi - \omega R_1)^2 - \frac{V_\varphi - \omega R_1}{c_*\chi_2}[K_1(\omega)(Q_1(\omega) + \rho_2 W_1(\omega)) - L_1(\omega)(S_1(\omega) + \rho_2 V_1(\omega))] + 0,5(L_1^2(\omega) + K_1^2(\omega))\},
$$

$$
\kappa_0(\omega) = 0,75 f R_1 \alpha_3^* C^{-1}[2c_*(V_\varphi - \omega R_1) + S_1(\omega)L_1(\omega) - Q_1(\omega)K_1(\omega)],
$$

$$
\begin{aligned}
c_0(\omega) = C^{-1}\{&-H(\omega) - f_K c_* + 0,5[\ell_1 S_1(\omega) + \ell_2 Q_1(\omega)] + fR_1[c_* - 0,5\alpha_1^*(2c_*(V_\varphi - \omega R_1) - Q_1(\omega)K_1(\omega) +\\
&+ S_1(\omega)L_1(\omega)) + 0,5\alpha_3^*[2c_*(V_\varphi - \omega R_1)^3 + 3(V_\varphi - \omega R_1)^2(S_1(\omega)L_1(\omega) - Q_1(\omega)K_1(\omega)) +\\
&+ 3c_*(V_\Phi - \omega R_1)(L_1^2(\omega) + K_1^2(\omega)) - 1,5K_1(\omega)Q_1(\omega)(L_1^2(\omega) + 0,5K_1^2(\omega)) +\\
&+ 1,5S_1(\omega)L_1(\omega)(0,5L_1^2(\omega) + K_1^2(\omega))]]\}.
\end{aligned}
$$

В систему (9) не вошли третье и четвертое уравнения системы (8), так как в результате вычислений имеем:

$$
\frac{d\Omega_1}{dt} = 0 \Rightarrow \Omega_1 = \theta_1 = \text{const},
$$

$$
\frac{d\Omega_2}{dt} = 0 \Rightarrow \Omega_2 = \theta_2 = \text{const}.
$$

Остановимся на анализе системы (9) методами качественной теории дифференциальных уравнений [2], [3]. Для нахождения стационарных решений этой системы необходимо приравнять нулю ее правые части и из полученных таким образом уравнений определить искомые величины.

Считая, что в системе генерируется близкое к равномерному вращению движение со средней скоростью ω=const, из третьего уравнения системы следует:

$$
c_0(\omega) + \kappa_0(\omega)(u+\upsilon) = 0. \qquad (10)
$$

Данное уравнение накладывает дополнительное ограничение на параметры u и υ, а следовательно, и на амплитуды a, b, но не оказывает влияния на характер состояний равновесия системы (9). Уравнение (10) отражает баланс моментов относительно оси вращения тела намотки: момент от сил трения в пятне контакта тело намотки – фрикционный цилиндр уравновешивается моментом сопротивления вращению тела намотки.

Значения u и υ, соответствующие особым точкам (состояниям равновесия) этой системы, будем искать из уравнений, которые получаются после приравнивания нулю правых частей первых двух уравнений (9):

$$P(u,\upsilon) = A_0 u[a_0(\omega) - u - 2\upsilon] = 0,$$
$$Q(u,\upsilon) = B_0 \upsilon[b_0(\omega) - \upsilon - 2u] = 0.$$

Так как $u = a^2 k_1^2 \chi_1^2 > 0$ и $\upsilon = b^2 k_2^2 \chi_2^2 > 0$, то будем рассматривать только первый квадрат плоскости uυ.

Особыми точками будут:

точка P_1: $u_1=0$, $\upsilon_1=0$; из выражений (5) следует, что при $d_1=e_1=d_2=e_2=0$ эта точка соответствует состоянию равновесия исходной системы; при $d_1\neq0$, $e_1\neq0$, $d_2\neq0$, $e_2\neq0$ – движению с частотой ω внешней силы;

точка P_2: $u_2=0$, $\upsilon_2=b_0(\omega)$; при $d_1=e_1=d_2=e_2=0$ точка P_2 соответствует периодическому движению с частотой k_2; при $d_1\neq0$, $e_1\neq0$, $d_2\neq0$, $e_2\neq0$ – бигармоническому движению с частотами k_2 и ω;

точка P_3: $u_3=a_0(\omega)$, $\upsilon_3=0$; при $d_1=e_1=d_2=e_2=0$ точка P_3 соответствует периодическому движению с частотой k_1; при $d_1\neq0$, $e_1\neq0$, $d_2\neq0$, $e_2\neq0$ – бигармоническому движению с частотами k_1 и ω;

точка P_4: $u_4 = \frac{1}{3}[2b_0(\omega) - a_0(\omega)]$, $v_4 = \frac{1}{3}[2a_0(\omega) - b_0(\omega)]$; при $d_1=e_1=d_2=e_2=0$ точка P_4 соответствует бигармоническому движению с частотами k_1 и k_2; при $d_1\neq0$, $e_1\neq0$, $d_2\neq0$, $e_2\neq0$ – тригармоническому движению системы с частотами k_1, k_2 , ω.

Следует отметить, для всех четырех особых точек (состояний равновесия) случай $d_1=e_1=d_2=e_2=0$ теоретически соответствует случаю отсутствия в системе вынужденных колебаний из-за идеальной статической и динамической уравновешенности ротора (e = δ = 0) и полного совмещения оси вращения тела намотки с его геометрической осью ($\lambda_1=0$), и, как следствие всего этого:

$$A_1(\omega)=A_2(\omega)=A_3(\omega)=B_1(\omega)=B_2(\omega)=B_3(\omega)=0.$$

Характер состояний равновесия определяем по знакам величин:

$$p = -\left[\frac{\partial P(u_0,\upsilon_0)}{\partial u} + \frac{\partial Q(u_0,\upsilon_0)}{\partial \upsilon}\right], \quad q = \frac{\partial P(u_0,\upsilon_0)}{\partial u}\frac{\partial Q(u_0,\upsilon_0)}{\partial \upsilon} - \frac{\partial P(u_0,\upsilon_0)}{\partial \upsilon}\frac{\partial Q(u_0,\upsilon_0)}{\partial u},$$

где u_0,υ_0 – координаты состояний равновесия.

Для исследуемой системы (9) имеем:

$$p=2(u + \upsilon)(A_0+ B_0)-[A_0 a_0(\omega)+ B_0 b_0(\omega)],$$
$$q=A_0B_0 [a_0(\omega)-2(u+\upsilon)][b_0(\omega)- 2(u+\upsilon)]-4A_0B_0u\upsilon.$$

Для состояния равновесия $P_1(u_1=0, \upsilon_1=0)$:

$$p=-[A_0 a_0(\omega)+ B_0 b_0(\omega)],$$
$$q= A_0 B_0 a_0(\omega)b_0(\omega).$$

Для состояния равновесия $P_2(u_2=0, \upsilon_2=b_0(\omega))$:

$$p= B_0 b_0(\omega)+ A_0 [2b_0(\omega)- a_0(\omega)],$$
$$q= A_0 B_0 b_0(\omega) [2b_0(\omega)- a_0(\omega)].$$

Для состояния равновесия P_3 ($u_3= a_0(\omega)$, $\upsilon_3=0$):

$$p= A_0 a_0(\omega)+ B_0[2a_0(\omega)- b_0(\omega)],$$
$$q= A_0B_0 a_0(\omega)[2a_0(\omega)- b_0(\omega)].$$

Для состояния равновесия P_4 $\left(u_4 = \frac{1}{3}[2b_0(\omega) - a_0(\omega)],\ \upsilon_4 = \frac{1}{3}[2a_0(\omega) - b_0(\omega)]\right)$:

$$p= A_0u_4+ B_0 \upsilon_4, \quad q=-3A_0B_0u_4\upsilon_4.$$

Для состояния равновесия P_4 имеем $q<0$, так как $A_0>0$, $B_0>0$, $u_4>0$, $\upsilon_4>0$. Следовательно, состояние равновесия вне осей P_4

является седлом. Существование и характер состояний равновесия системы (9) (табл. 1) определяется величинами $a_0(\omega)$ и $b_0(\omega)$, которые зависят от параметров, характеризующих трение скольжения между телом намотки и фрикционным цилиндром, разности между их окружными скоростями, амплитуд линейных и угловых колебаний ротора в вертикальной и горизонтальной плоскостях, эксцентричности тела намотки, угловой скоростью ротора ω.

Т а б л и ц а 1

№ п/п	Случай	Состояние равновесия			
		P_1	P_2	P_3	P_4
1	$a_0(\omega)<0, b_0(\omega)<0$	Устойчивый узел	Нет	Нет	Нет
2	$a_0(\omega)>0$, $b_0(\omega)<0$	Седло	Нет	Устойчивый узел	Нет
3	$a_0(\omega)<0, b_0(\omega)>0$	Седло	Устойчивый узел	Нет	Нет
4	$a_0(\omega)>0$, $b_0(\omega)>0$, $a_0(\omega)>2b_0(\omega)$	Неустойчивый узел	Седло	Устойчивый узел	Нет
5	$a_0(\omega)>0$, $b_0(\omega)>0$, $a_0(\omega)<2b_0(\omega)$, $a_0(\omega)\geq b_0(\omega)$	Неустойчивый узел	Устойчивый узел	Устойчивый узел	Седло
6	$a_0(\omega)>0$, $b_0(\omega)>0$, $2a_0(\omega)>b_0(\omega)$, $b_0(\omega)\geq a_0(\omega)$	Неустойчивый узел	Устойчивый узел	Устойчивый узел	Седло
7	$a_0(\omega)>0$, $b_0(\omega)>0$, $b_0(\omega) > 2a_0(\omega)$	Неустойчивый узел	Устойчивый узел	Седло	Нет

Так как $u=0$, $\upsilon=0$ – интегральные кривые и кроме седла вне осей других особых точек нет, то система (9) предельных циклов не имеет. Аналогичный результат – отсутствие предельных циклов для систем, близких к двум первым уравнениям системы (9), был получен в работе [3], но при этом был использован критерий Бендиксона - Дюлака отсутствия предельных циклов.

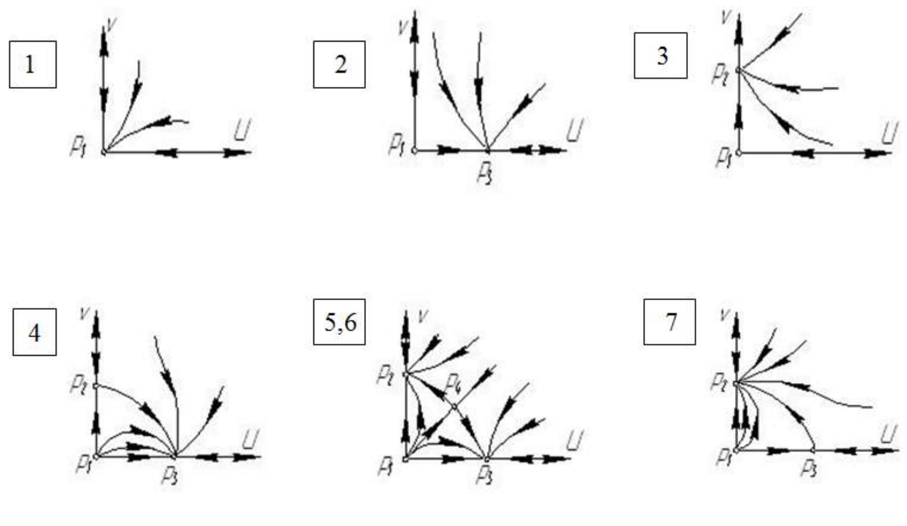

Рис. 1

На рис. 1 показаны картины фазовой плоскости для случаев, представленных в табл. 1.

Покажем, что в системе возможны незатухающие колебательные режимы с частотами k_1 или k_2 даже в случае идеальной статической и динамической уравновешенности ротора ($e = \delta = 0$) и полного совмещения оси вращения тела намотки с его геометрической осью ($\lambda_1=0$), и, как следствие всего этого:

$$d_1 = e_1 = d_2 = e_2 = A_1(\omega) = A_2(\omega) = $$
$$= A_3(\omega) = B_1(\omega) = B_2(\omega) = B_3(\omega) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае:

$$a_0(\omega) = b_0(\omega) = \frac{4\alpha_1^*}{3\alpha_3^*} - 4(V_ф - \omega R_1)^2. \quad (11)$$

В первом случае (см. табл. 1) система при $a_0(\omega)<0$, $b_0(\omega)<0$ будет находиться в состоянии равновесия (отсутствует какое либо движение), в пятом $a_0(\omega)>0$, $b_0(\omega)>0$, $a_0(\omega)<2b_0(\omega)$, $a_0(\omega)\geq b_0(\omega)$ и шестом $a_0(\omega)>0$, $b_0(\omega)>0$, $2a_0(\omega)>b_0(\omega)$, $b_0(\omega) \geq a_0(\omega)$ случаях реализуются состояния равновесия P_2 или P_3, соответствующие возникновению в системе периодических колебаний с частотами k_1 или k_2.

Таким образом, условие возникновения в системе периодических колебаний с частотами k_1 или k_2 имеет вид:

$$\frac{4\alpha_1^*}{3\alpha_3^*} > 4(V_ф - \omega R_1)^2. \quad (12)$$

В условие (12) и выражения для параметров u и υ, а следовательно, и амплитуд a, b, входят постоянные α_1^*, α_3^*, характеризующие трение в пятне контакта между телом намотки и фрикционным цилиндром, а также разность между их окружными скоростями $V_ф - \omega R_1$. Данное обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что периодические колебаний с частотами k_1 или k_2 являются автоколебаниями.

Однако случаи идеальной статической и динамической уравновешенности ротора ($e = \delta = 0$) и полного совмещения оси вращения тела намотки с его геометрической осью ($\lambda_1=0$) не достижимы с практической точки зрения, и в системе устанавливаются смешанные колебания с частотой k_1 или k_2 и вынужденные колебания с частотой ω.

В Ы В О Д Ы

1. Фрикционные намоточные механизмы в отличие от роторных систем других видов относятся к механическим системам, в которых могут реализовываться смешанные колебания согласно классификации [4] класса ВА – взаимодействие вынужденных колебаний, обусловленных наличием статической, динамической неуравновешенностей ротора и кинематического возбуждения, вызванного смещением оси вращения тела намотки относительно его геометрической оси, и автоколебаний, возникающих из-за наличия автоколебательного механизма, связанного с фрикционным взаимодействием тела намотки и фрикционного цилиндра.

2. Взаимодействие вынужденных колебаний и автоколебаний качественно и количественно изменяет характер колебаний фрикционных намоточных механизмов.

3. Для подтверждения наличия автоколебаний во фрикционных намоточных механизмах необходимо провести комплекс экспериментальных исследований.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Степанов С.Г., Малеев Д.С., Чистобородов Г.И.* Математическая модель для исследования нелинейных колебаний фрикционных намоточных механизмов рычажного типа // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2013, №5. С.140…146.

2. *Бутенин Н.Н., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987.

3. *Баутин Н.В., Леонтович Е.Л.* Методы и приемы качественного анализа исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976.

4. *Алифов А.А., Фролов К.В.* Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. – М.: Наука, 1985.

Рекомендована кафедрой инженерной графики ИГТА. Поступила 03.10.12.