

УДК 677.017.4:531

**ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ,
ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ РАВНОВЕСНУЮ СТРУКТУРУ КРУЧЕНОЙ НИТИ**

**THE THEORY AND CALCULATION OF POWER FACTORS
DETERMINING AN EQUILIBRIUM STRUCTURE OF A TWISTED YARN**

*В.П. ЩЕРБАКОВ, И.Б. ЦЫГАНОВ, Т.И. ПОЛЯКОВА, Н.С. СКУЛАНОВА, Е.Р. ПОПОВА
V.P. SHCHERBAKOV, I.B. TSYGANOV, T.I. POLYAKOVA, N.S. SKULANOVA, E.P. POPOVA*

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)
(Moscow State Textile University "A.N. Kosygin")
E-mail: office@msta.ac.ru

Проанализированы механика скрученных между собой нитей, геометрия и прочность пряжи в два сложения. Приведены результаты эксперимента и расчета жесткости нити при кручении и жесткости нити при изгибе. Дан расчет, иллюстрирующий практическое применение теории.

The mechanics of twisted yarns, geometry and strength of yarn in two additions have been analyzed. The results of the experiment and calculation of twisted yarn rigidity and bent yarn rigidity have been presented. The calculation illustrating the practical application of the theory has been presented.

Ключевые слова: нить, равновесие, кручение, нелинейный изгиб, жесткость, силы, моменты, контактная нагрузка.

Keywords: a yarn, balance, twisting, a nonlinear bend, rigidity, power, moments, contact loading.

Будем скрученную в два сложения нить называть крученой нитью, а ее компоненты – одиночные нити – просто нитью. Конечно, первичные нити (это может быть комплексная нить или пряжа) при формировании тоже приобретают кручение, но здесь они рассматриваются как упругие нити с жесткостью при изгибе EI и жесткостью при кручении GI_p . Здесь обозначены: E – модуль упругости, G – модуль сдвига, I – осевой момент инерции сече-

ния, I_p – полярный момент инерции сечения. При этом как жесткость при изгибе, так и жесткость при кручении в большой мере зависят от степени скрученности нити, характеризующейся круткой K . В процессе скручивания нити необходимо натягивать. Поэтому на концах каждой из нитей в направлении оси крученой нити приложена сила T_1 .

Сечение каждой из двух нитей представляет собой круг радиусом R , а осевая

линия нити – винтовую линию с углом подъема β и радиусом, равным радиусу поперечного сечения крученой нити, то есть тоже R . Кривизна винтовой линии является постоянной, $\kappa_3 = \frac{\sin^2 \beta}{R}$, кручение

$\kappa_1 = \frac{\sin \beta \cos \beta}{R}$. Здесь под кручением следует

понимать первую компоненту вектора Дарбу, характеризующего меру отклонения кривой от плоской формы. Напомним, что вектором Дарбу называется вектор, который определяет вращение естественных осей при движении точки по кривой.

Между нитями вдоль винтовой линии возникает контактная равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q . У винтовой линии главная нормаль ν пересекает ось нити под прямым углом и совпадает с ее радиусом. Возьмем на поверхности одной нити точку касания A (рис. 1 – скрученная в два сложения нить) [1].

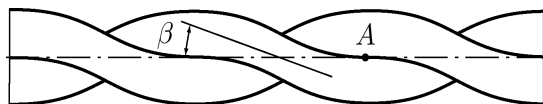


Рис. 1

Вследствие свойств винтовой линии нормаль ν в точке A является одновременно нормалью к поверхности второй изогнутой по винтовой линии нити. Последовательность точек касания A образует ось крученой нити. Технология формирования крученой нити должна обеспечить получение равновесной структуры. Если правильно подобрать геометрические и силовые параметры скручивания с учетом свойств нитей, то ось крученой нити будет представлять собой прямую. Линия контакта, образуемая точками касания A ось крученой нити, является прямой линией (рис. 1).

Рассечем крученую нить плоскостью, перпендикулярной ее оси [2]. В сечении будут располагаться два соприкасающихся эллипса, представляющие собой сечения нитей, расположенных под углом β к оси крученой нити (рис. 2 – к равновесию крученой нити).

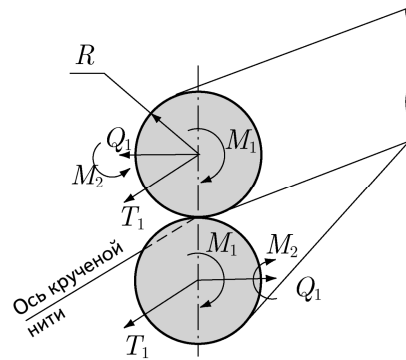


Рис. 2

Система самоуравновешенных внутренних сил, действующих в сечении крученой нити, сводится к моментам M_1 и M_2 , силам T_1 и Q_1 . Для упругой нити существуют соотношения, основанные на пропорциональности компонентов кривизны и кручения компонентам главного момента внутренних усилий: крутящий момент $M_k = GI_p \kappa_1$, изгибающий момент $M_{ii} = EI \kappa_3$, где κ_1 – кручение осевой линии нити, возникающее при скручивании элемента нити моментом M_k ; κ_3 – кривизна пространственной осевой линии при изгибе нити моментом M_{ii} . Значения изгибающих и крутящих моментов определяются жесткостными характеристиками, зависящими, как уже отмечалось, от величины крутки K . Общее для двух нитей сечение не перпендикулярно осевым винтовым линиям каждой из них. Поэтому рассматриваемые в сечении крученой нити моменты M_1 и M_2 не могут быть ни крутящими, ни изгибающими, так же как силы T_1 и Q_1 не являются соответственно ни растягивающей, ни перерезывающей.

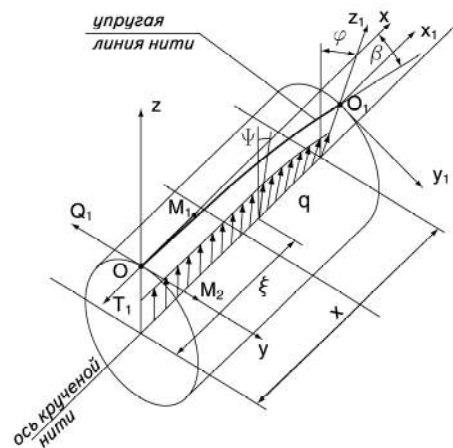


Рис. 3

Ось крученой нити является прямой линией контакта нитей. Построим на этой оси вспомогательный цилиндр радиусом R (рис. 3 – к равновесию крученой нити). На поверхности этого цилиндра будут расположены винтовые осевые упругие линии нитей. Рассмотрим верхнюю винтовую линию. Поместим в точке пересечения этой линии с плоскостью сечения крученой нити начало координат $Oxyz$. Ось Ox направим вдоль оси крученой нити, Oy – горизонтально вправо, Oz – вертикально вверх. В точке O приложены моменты M_1 и M_2 , а также силы T_1 и Q_1 . Вдоль оси построенного вспомогательного цилиндра в радиальном направлении действует распределенная нагрузка интенсивностью q . От

точки O на расстоянии x на упругой линии выберем произвольную точку O_1 . В этой точке поместим подвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$. Ось O_1x_1 направлена параллельно оси O_1x , ось O_1z_1 повернута относительно координатной оси Ox на угол φ . Для обеспечения равновесности крученой нити необходимо, чтобы в произвольно взятой на упругой линии точке O_1 моменты M_1 и M_2 , силы T_1 и Q_1 были бы такими же, что и в точке O . Причем все это должно быть независимо от x и φ .

Найдем проекции сил на подвижные координатные оси $O_1x_1y_1z_1$. Составляющая сил по оси O_1x_1 равна T_1 , так как остальные силы Q_1 и q перпендикулярны этой оси. Тогда проекции сил на оси x_1, y_1, z_1 :

$$X_{1O_1} = T_1; \quad Y_{1O_1} = -Q_1 \cos \varphi - \int_0^x q \sin(\varphi - \psi) d\xi; \quad Z_{1O_1} = -Q_1 \sin \varphi + \int_0^x q \cos(\varphi - \psi) d\xi. \quad (1)$$

Чтобы получить связь между текущими величинами ψ и ξ , найдем длину дуги, соответствующей ξ : $\ell_\xi = R\psi$ или $\ell_\xi = \xi \operatorname{tg} \beta$. Отсюда $R\psi = \xi \operatorname{tg} \beta$ и

$$\xi = R\psi \operatorname{ctg} \beta, \quad d\xi = R \operatorname{ctg} \beta d\psi. \quad (2)$$

Проинтегрируем $\int_0^x q \sin(\varphi - \psi) d\xi$, предварительно перейдя от переменной ξ к ψ .

Имеем:

$$X_{1O_1} = T_1; \quad Y_{1O_1} = -Q_1 \cos \varphi - qR \operatorname{ctg} \beta (1 - \cos \varphi); \quad Z_{1O_1} = -Q_1 \sin \varphi + qR \operatorname{ctg} \beta \sin \varphi. \quad (3)$$

Как было отмечено, для обеспечения равновесности крученой нити необходимо, чтобы в произвольно взятой на упругой линии точке O_1 силы T_1 и Q_1 независимо от x и φ были бы такими же, что и в точке O . Поэтому потребуем, чтобы $Y_{1O_1} = -Q_1$ и

$$qR \operatorname{ctg} \beta \int_0^\varphi \sin(\varphi - \psi) d\psi,$$

или

$$qR \operatorname{ctg} \beta \int_0^\varphi \sin \theta d\theta = qR \operatorname{ctg} \beta (1 - \cos \varphi).$$

Аналогично находится и второй интеграл системы (1):

$Z_{1O_1} = 0$. Из этих условий имеем:

$$Q_1 = qR \operatorname{ctg} \beta. \quad (4)$$

Составим суммы моментов относительно осей x_1, y_1, z_1 , (рис. 3):

$$\begin{aligned} M_{O_1x_1} &= M_1 - Q_1 R (1 - \cos \varphi) + \int_0^x qR \sin(\varphi - \psi) d\xi, \\ M_{O_1y_1} &= M_2 \cos \varphi + Q_1 x \sin \varphi - T_1 R (1 - \cos \varphi) - \int_0^x q(x - \xi) \cos(\varphi - \psi) d\xi, \\ M_{O_1z_1} &= M_2 \sin \varphi - Q_1 x \cos \varphi + T_1 R \sin \varphi - \int_0^x q(x - \xi) \sin(\varphi - \psi) d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Проинтегрировав выражения (5) с уче-

том формулы (2) и $x=R\varphi\text{ctg}\beta$, получим:

$$\begin{aligned} M_{O_1x_1} &= M_1 - Q_1 R (1 - \cos\varphi) + qR^2 \text{ctg}\beta (1 - \cos\varphi), \\ M_{O_1y_1} &= M_2 \cos\varphi + Q_1 x \sin\varphi - T_1 R (1 - \cos\varphi) - qR^2 \text{ctg}^2\beta (\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - 1), \\ M_{O_1z_1} &= M_2 \sin\varphi - Q_1 x \cos\varphi + T_1 R \sin\varphi - qR^2 \text{ctg}^2\beta (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Как и для сил, необходимо, чтобы $M_{O_1x_1} = M_1$, $M_{O_1y_1} = M_2$, $M_{O_1z_1} = 0$. Тогда наряду с условием (4) появляется дополнительное условие равновесности крученой нити:

$$M_2 = qR^2 \text{ctg}^2\beta - T_1 R. \quad (7)$$

Что касается момента M_1 , то он легко находится из условия равновесия:

$$M_1 = Q_1 R. \quad (8)$$

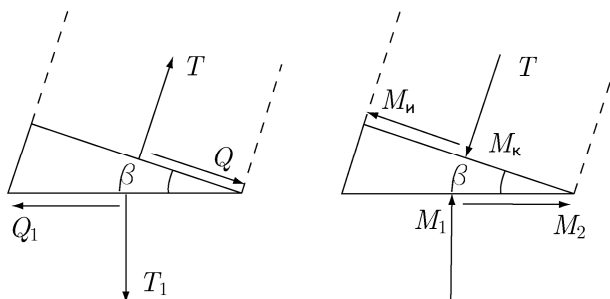


Рис. 4

Из условий равновесия сил:

$$T = Q_1 \sin\beta + T_1 \cos\beta; \quad Q = Q_1 \cos\beta - T_1 \sin\beta. \quad (9)$$

Из условий равновесия моментов:

$$M_n = M_2 \cos\beta - M_1 \sin\beta; \quad M_k = M_1 \cos\beta + M_2 \sin\beta. \quad (10)$$

Принимая во внимание соотношения (4), (7), (8) и рис. 5 (к условию равновесия сил и моментов), напишем выражения для сил и моментов, действующих в сечении нити:

$$\begin{aligned} T &= q_0 R + T_1 \cos\beta, \quad Q = q_0 R \text{ctg}\beta - T_1 \sin\beta; \\ M_n &= q_0 R^2 (\text{ctg}^2\beta - 1) - T_1 R \cos\beta, \\ M_k &= 2q_0 R^2 \text{ctg}\beta - T_1 R \sin\beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдем теперь возникающие в сечениях, перпендикулярных оси каждой из нитей, изгибающий момент M_n , крутящий момент M_k , растягивающую T и перерезывающую Q силы. Для этого рассмотрим равновесие сил и моментов, действующих на элемент нити, выделенный сечениями, нормальными к оси крученой нити и к оси отдельной нити (рис. 4 – равновесие сил и моментов).

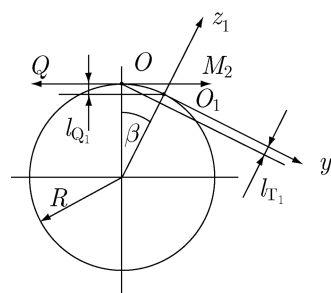


Рис. 5

В эти выражения введена приведенная к осевой линии нити контактная нагрузка

$$q_0 = q \cos\beta. \quad (12)$$

Выше уже были написаны соотношения пропорциональности компонентов кривизны и кручения компонентам главного момента внутренних усилий: крутящий момент $M_k = GI_p \kappa_1$, изгибающий момент $M_n = EI \kappa_3$. Используя известные кручение $\kappa_1 = \frac{\sin\beta \cos\beta}{R}$ и кривизну $\kappa_3 = \frac{\sin^2\beta}{R}$ винтовой линии, перепишем моменты в виде:

$$M_{и} = EI \frac{\sin^2 \beta}{R}, \quad M_{к} = GI_p \frac{\sin \beta \cos \beta}{R}. \quad (13)$$

$$q_0 R^2 (\operatorname{ctg}^2 \beta - 1) - T_1 R \cos \beta = EI \frac{\sin^2 \beta}{R}; \quad 2q_0 R^2 \operatorname{ctg}^2 \beta - T_1 R \sin \beta = GI_p \frac{\sin \beta \cos \beta}{R}. \quad (14)$$

Из второго соотношения найдем контактную нагрузку:

$$q_0 = \frac{T_1}{2R} \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} + GI_p \frac{\sin^2 \beta}{2R^3}. \quad (15)$$

Исключим из первого равенства (14) q_0 и определим усилие T_1 , которое обеспечивает равновесность крученой нити при заданном угле β . Обозначив $e = \frac{EI}{GI_p}$, получим:

$$T_1 = \frac{GI_p [1 - 2\sin^2 \beta (1 + e)] \cos \beta}{R^2}. \quad (16)$$

Отдельные нити в составе крученой могут иметь разную жесткость. Поэтому, чтобы получить прямолинейную форму оси крученой нити, в зону скручивания двух нитей надо подавать нити с различным натяжением, пропорциональным их жесткости при изгибе и кручении.

Рассмотрим теперь как частный случай взаимодействие нитей после скручивания. В нашем распоряжении имеется текстильный продукт, предназначенный для переработки в трикотажном, ткацком и других производствах. Внешние силы, включая осевую силу T_1 , и моменты отсутствуют. Равновесная структура с прямолинейной осью крученой нити возможна только при условии равных жесткостей скручиваемых нитей, то есть нити должны быть одинаковыми. Тогда из формул (14) имеем

$$q_0 R^2 (\operatorname{ctg}^2 \beta - 1) = EI \frac{\sin^2 \beta}{R}, \quad (17)$$

$$2q_0 R^2 \operatorname{ctg}^2 \beta = GI_p \frac{\sin \beta \cos \beta}{R}.$$

Подставим в выражения (13) значения изгибающего и крутящего моментов из двух последних равенств (11):

Исключим из этих выражений q_0 и получим $\operatorname{ctg}^2 \beta - 1 = \frac{2EI}{GI_p}$. С учетом ранее введенного обозначения отношения жесткостей можно записать:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{1}{1 + 2e}}. \quad (18)$$

Из формулы (15) при $T_1 = 0$ следует:

$$q_0 = GI_p \frac{\sin^2 \beta}{2R^3}. \quad (19)$$

С учетом соотношения (18) и формулы $\sin^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$ получим выражения для основных силовых факторов, определяющих равновесную структуру крученой нити:

$$q_0 = GI_p \frac{1}{4R^3 (1 + e)};$$

$$T = GI_p \frac{1}{4R^2 (1 + e)};$$

$$Q = GI_p \frac{\sqrt{1 + 2e}}{4R^2 (1 + e)}; \quad (20)$$

$$M_{и} = EI \frac{1}{2R (1 + e)};$$

$$M_{к} = GI_p \frac{\sqrt{1 + 2e}}{2R (1 + e)}.$$

Для числовой оценки сил и моментов нужны данные жесткостных характеристик $EI = H$ и $GI_p = B$. Теорию и методику определения величин H и B предполагается изложить в последующих статьях. Сейчас же ограничимся значениями, полученными из эксперимента, проведенного с

чистошерстяной пряжей линейной плотности 32 текс. Жесткость пряжи при кручении равна $B_y = 0,042 \text{ сН} \cdot \text{мм}^2$, жесткость при изгибе той же пряжи $H = 0,748 \text{ сН} \cdot \text{мм}^2$. Вычислим теперь основные силовые факторы, определяющие равновесную структуру скрученной в два сложения чистошерстяной пряжи 31×2 текс. Внешние силы, включая осевую силу (натяжение), и моменты отсутствуют, отношение жесткостей $e = \frac{H}{B} = 17,81$. В этих условиях получим:

приведенная к осевой линии нити контактная нагрузка

$$q_0 = B \frac{1}{4R^3(1+e)} = 0,446 \frac{\text{сН}}{\text{мм}},$$

натяжение каждой из нитей в составе скрученной

$$T = B \frac{1}{4R^2(1+e)} = 0,048 \text{ сН},$$

перерезывающая сила

$$Q = B \frac{\sqrt{1+2e}}{4R^2(1+e)} = 0,291 \text{ сН},$$

изгибающий момент

$$M_u = H \frac{1}{2R(1+e)} = 0,184 \text{ сН} \cdot \text{мм},$$

крутящий момент

$$M_k = B \frac{\sqrt{1+2e}}{2R(1+e)} = 0,063 \text{ сН} \cdot \text{мм}.$$

Еще раз подчеркнем, что скрученная нить находится в свободном состоянии, внешних сил и моментов нет, но все же из-за упругости деформированных при кручении нитей в отдельных скрученных между собой нитях возникают и силы и моменты. В полной мере это относится к одиночным нитям и пряже, где роль нитей будут играть отдельные волокна. И только благодаря упругой природе нитей, ткани, трикотажа текстильные материалы существуют как одно- и двумерные гибкие твердые тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков В.П., Скуланова Н.С. Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов: Монография. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008.
2. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1996.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила .26.11.12