УДК 677.08.021

ДЕФОРМАЦИЯ НЕТКАНЫХ ПОЛОТЕН ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ ИХ ИЗ ВТОРИЧНОГО СЫРЬЯ

В.Д. ФРОЛОВ, Б. ЭРДЭНЭЦЭЦЭГ, И.В. ФРОЛОВА

(Ивановская государственная текстильная академия, Монгольский университет науки и техники)

В процессе технологической обработки разнородного волокнистого сырья из отходов шерсти считаем, что изотропное упругое тело в процессе валки обладает одинаковыми упругими свойствами во всех направлениях, в каждой точке. Отсюда упругий потенциал W является инвариантом тензора деформаций, если W выражено через удельную потенциальную энергию деформации, или тензора напряжений, если W выражается через напряжения.

Тензор напряжений имеет три независимые алгебраические комбинации инварианта компонентов напряжений в данной точке, не зависящие от направления осей:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{zx}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_x\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Вследствие того, что упругий потенциал есть однородная алгебраическая функция второй степени от шести компонентов деформации, то есть является квадратичной формой, коэффициент последней получаем в виде

$$d_{ij} = d_{ij} + d_{ji} \text{ при } i \neq j.$$

Тогда упругий потенциал можно записать в матричной форме [1]:

$$W = \frac{1}{2}(\varepsilon)' D\varepsilon, \tag{2}$$

где D – матрица, независимые элементы которой есть величины d_{ij}:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11}\ldots\ldots d_{16} \\ d_{61}\ldots\ldots d_{66} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Тогда обобщенный закон Гука запишется в матричной форме:

$$\sigma = D\varepsilon \text{ или } \varepsilon = (D)^{-1}\sigma. \tag{4}$$

При этом предполагается, что матрица D имеет обратную форму и носит название матрицы упругости:

$$(\varepsilon)'\sigma = W + \overline{W}, \tag{5}$$

где $\overline{W}$ – функция дополнительной потенциальной энергии деформации, отнесенной к единице объема тела:

$$\varepsilon = \frac{d\overline{W}}{d\sigma}. \tag{6}$$

Если предположить, что матрица D имеет обратную форму и вектор деформации ε выражается через вектор напряжений σ согласно (4), то, подставляя в (2) вместо ε его выражение через σ, имеем

W – квадратичную форму от компонентов вектора напряжений:

$$W=\frac{1}{2}\left((D)^{-1}\sigma\right)' D(D)^{-1}\sigma=\frac{1}{2}(\sigma)'\left((D)^{-1}\right)'\sigma\ ,$$

где транспонированная матрица при операции обращения: $\left((D)^{-1}\right)=\left((D)'\right)^{-1}=(D)^{-1}$.

Отсюда

$$W=\frac{1}{2}(\sigma)'(D)^{-1}\sigma. \qquad (7)$$

Исходя из (2) и (4), получим

$$W=\frac{1}{2}(\varepsilon)'\sigma \ \text{ или } \ (\varepsilon)'\sigma=2W. \qquad (8)$$

На основании (5) и (8) функция дополнительной потенциальной энергии выглядит так:

$$\overline{W}=(\varepsilon)'\sigma-W=\frac{1}{2}(\varepsilon)'\sigma=W. \qquad (9)$$

Следовательно, в случае использования обобщенного закона Гука дополнительный упругий потенциал $\overline{W}$ и упругий потенциал W совпадают и (6) принимает вид

$$\varepsilon=\frac{dW}{d\sigma},\ \ \varepsilon_x=\frac{dW}{\sigma_x}\ \text{ и т.д.,} \qquad (10)$$

что согласуется с формулами Грина

$$\sigma=\frac{dW}{d\varepsilon}\ \text{ и }\ \sigma_x=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_x};\ \ \sigma_y=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_y};\ \ \sigma_z=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_z};\ \ \tau_{xy}=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{xy}}\ \ldots \text{ и т.д.} \qquad (11)$$

Рассматривая два различных напряжения деформированного состояния одного и того же волокнистого полотна, на основании обобщенного закона Гука отмечаем:

$$\sigma^{(1)}=D\varepsilon^{(1)},\qquad \sigma^{(2)}=D\varepsilon^{(2)}. \qquad (12)$$

Отсюда скалярные произведения векторов $\sigma^{(1)}$; $\varepsilon^{(2)}$ и векторов $\sigma^{(2)}$; $\varepsilon^{(1)}$ будут

$$\left(\sigma^{(1)}\right)'\varepsilon^{(2)}=\left(D\varepsilon^{(1)}\right)'\varepsilon^{(2)}=\left(\varepsilon^{(1)}\right)'D\varepsilon^{(2)},$$

$$(13)$$

$$\left(\sigma^{(1)}\right)'D\varepsilon^{(2)}=\left(D\varepsilon^{(2)}\right)'\varepsilon^{(1)}=\left(\varepsilon^{(2)}\right)'D\varepsilon^{(1)},$$

где $\sigma^{(1)}$, $\varepsilon^{(1)}$ – векторы напряжения и деформации для первого состояния волокнистого полотна; $\sigma^{(2)}$, $\varepsilon^{(2)}$ – для второго состояния.

Транспонирование скалярного произведения двух векторов в первой формуле (13) ничего не меняет, поэтому

$$\left(\varepsilon^{(1)}\right)'D\varepsilon^{(2)}=\left(\left(\varepsilon^{(1)}\right)'D\varepsilon^{(2)}\right)'=\left(D\varepsilon^{(2)}\right)'\varepsilon^{(1)}. \qquad (14)$$

Из условия симметрии матрицы упругости $(D)'=D$ и из (14) имеем равенство правых частей (13):

$$\left(\varepsilon^{(1)}\right)'D\varepsilon^{(2)}=\left(\varepsilon^{(2)}\right)'D\varepsilon^{(1)}, \qquad (15)$$

откуда следует равенство левых частей в (13):

$$\left(\sigma^{(1)}\right)'\varepsilon^{(2)}=\left(\sigma^{2}\right)'\varepsilon^{(1)}. \qquad (16)$$

Это общий случай для анизотропных материалов, когда функциональная зависимость упругого потенциала от компонентов деформаций изменяется при переходе от одних координатных осей к другим. Для такого материала два одинаково выделенных из него элемента будут обладать одинаковыми упругими свойствами лишь в том случае, если эти элементы одинаково ориентированы, то есть упругие свойства нетканого материала в каждой точке по всем направлениям одинаковы – изотропны и для этого материала остается только два независимых элемента d_{ij}, а число упругих характеристик сокращается до 9.

Такая среда будет ортотропная, а матрица упругости D примет вид

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & d_0 & 0 & 0 \\ \text{симметрично} & & & & d_0 & 0 \\ & & & & & d_0 \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

где $d_0 = \frac{1}{2}(d_{11}-d_{12})$.

Таким образом, в изотропном материале на одну и ту же деформацию элементарного параллелепипеда, расположенного в направлении любой из осей, проходящих через данную точку, нужно затратить одну и ту же работу. Отсюда заключаем, что упругий потенциал и выражение удельной потенциальной энергии деформации не должно изменяться при любом повороте осей, поэтому с помощью формул (1) и (7) эту функцию запишем следующим образом:

$$W = AI_1^2 + AI_2^2 = A(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + B(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2), \qquad (18)$$

где A, B – постоянные, характеризующие физические свойства изотропного материала.

Из формулы Кастильяно (10):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2A\sigma_x + (2A+B)(\sigma_y+\sigma_z),\ \varepsilon_{xy} = -2B\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= 2A\sigma_y + (2A+B)(\sigma_z+\sigma_x),\ \varepsilon_{yz} = -2B\tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= 2A\sigma_z + (2A+B)(\sigma_x+\sigma_y),\ \varepsilon_{zx} = -2B\tau_{zy}, \end{aligned} \qquad (19)$$

а при условии

$$2A=\frac{1}{E},\ -2B=\frac{1}{G},\ 2A+B=-\frac{V}{E}, \qquad (20)$$

откуда имеет место равенство $G = \frac{E}{2(1+V)}$, формулу (19) представим в виде закона Гука для изотропного материала:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - V(\sigma_y+\sigma_z)],\ \varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - V(\sigma_z+\sigma_x)],\ \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - V(\sigma_x+\sigma_y)],\ \varepsilon_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \qquad (21)$$

где A и B выражаются через две физические характеристики текстильного материала; E – модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации и зависящий от них G – модуль поперечной упругости).

Когда в упругом волокнистом материале возникает напряженно-деформированное состояние, вызванное температурным полем, действие которого можно трактовать как частный случай дисторсии или воздействия начальных деформаций, каждый отдельный элементарный кубик текстильного материала под действием температуры T имеет объемное растяжение (или сжатие) и его деформация:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \varepsilon_y^0 = \varepsilon_z^0 = \alpha T, \\ \varepsilon_{xy}^0 &= \varepsilon_{yz}^0 = \varepsilon_{zx}^0 = 0. \end{aligned} \qquad (22)$$

Это отвечает вектору начальных деформаций при действии температуры:

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

где α – коэффициент линейного теплового расширения (сжатия) для рассматриваемого материала.

В развернутой форме для дополнительных нагрузок приходим к задаче в перемещениях:

$$1)\ (A)'DAu + p - (A)'D\varepsilon^0 = 0,$$
$$2)\ u=u_s,\ \in S_u,$$
$$3)\ (A_s)'DAu = g_s + (A_s)'D\varepsilon^0, \in S_g. \quad (24)$$

Введем обозначения:

$$p^0 = p - (A)'D\varepsilon^0,\ \in V;$$
$$g_s^0 = g_s + (A_s)'D\varepsilon^0,\ \in S_g. \quad (25)$$

Тогда задача теории упругости в перемещениях (24) при действии вектора заданных начальных деформаций ε^0 переходит в обычную задачу теории упругости в перемещениях относительно вектора перемещений u:

$$1)\ (A)'DAu + p = 0,$$
$$2)\ u=u_s,\ \in S_u,$$
$$3)\ (A_s)'DAu = g_s,\ \in S_g \quad (26)$$

с заданными объемными нагрузками $p^0=(X^0\ У^0\ Z^0)$ в объеме V с поверхностью S и поверхностными силами $g_s^0 = (X_n^0 Y_n^0 Z_n^0)$ на S, определенными по (25).

При этом напряжения определяются через найденные перемещения из (24) по формуле

$$\sigma = D(Au - D\varepsilon^0) = D(\varepsilon - \varepsilon^0). \quad (27)$$

При действии температуры на изотропный нетканый материал с не зависимыми от координат упругими постоянными

$$P^0\text{-}P = (A)'D\varepsilon^0 = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(3\lambda+2\mu)T \\ \alpha(3\lambda+2\mu)T \\ \alpha(3\lambda+2\mu)T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

откуда

$$X^0 - X = -\alpha(3\lambda+2\mu)\frac{\partial T}{\partial x},$$
$$Y^0 - Y = -\alpha(3\lambda+2\mu)\frac{\partial T}{\partial y}, \quad (29)$$
$$Z^0 - Z = -\alpha(3\lambda+2\mu)\frac{\partial T}{\partial z}$$

есть те дополнительные составляющие вектора объемных сил в материале, которые обусловлены действием температуры.

Поверхностные силы определим по формуле

$$g^0{}_s\text{-}g_s = (A_s)'D\varepsilon^0 \begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(3\lambda+2\mu)T \\ \alpha(3\lambda+2\mu)T \\ \alpha(3\lambda+2\mu)T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

откуда

$$X_n^0 - X_n = -\alpha(3\lambda + 2\mu)T_{nx},$$
$$Y_n^0 - Y_n = -\alpha(3\lambda + 2\mu)T_{ny}\ \text{Э} \qquad (31)$$
$$Z_n^0 - Z_n = -\alpha(3\lambda + 2\mu)T_{nz}$$

есть те дополнительные составляющие вектора поверхностных сил на S_t, которые обусловлены действием температуры T.

Таким образом, если в точках волокнистого материала задана температура T, то ее действие сводится к действию объемных сил (29), пропорциональных градиенту T в данной точке материала и поверхностных сил (31) на S_t, пропорциональных T в данной точке поверхности S_t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мертвищев Ю.И.* Применение прессования в производстве войлочных изделий. – М.: Гизлегпром, 1958.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 28.10.03.