УДК 677-486.2:539.311

РАСЧЕТ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ И ПРОЧНОСТИ КРУЧЕНОЙ НИТИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА*

В. П. ЩЕРБАКОВ, И. Б. ЦЫГАНОВ, В. А. ЗАВАРУЕВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)

Если принять $\nu = 0,5$, что равносильно допущению о том, что при деформировании изменения объема не происходит, то появляется возможность использования гипотезы Людвика о существовании "единой кривой" деформирования, не зависящей от типа напряженного состояния и совпадающей с диаграммой растяжения.

Экспериментальные кривые деформирования волокна и нити получают в условиях одноосного растяжения. По результатам испытаний и определяют упругие постоянные. Но волокно в составе нити нагружается продольной растягивающей силой и внешним давлением со стороны соседних волокон. Нагружение является сложным. Тогда по существу у нас нет иного выхода, как принять коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$, и только в этом случае диаграмма деформирования, построенная при сложном напряженном состоянии, и диаграмма растяжения совпадают.

Разрушение нити начинается с разрыва волокон. Предел прочности волокна при растяжении определяется соотношением $\sigma^*_f = E_f\varepsilon^*_f$. Деформация волокон уменьшается пропорционально $\cos^2\vartheta$ в радиальном направлении нити от $\varepsilon_f = \varepsilon_1$ до $\varepsilon_f = \varepsilon_1\cos^2\beta$.

Максимальная деформация возникает в центральных волокнах и равна деформации нити. Максимальное напряжение или предел прочности при растяжении центральных волокон, которые первыми разрываются и затем инициируют разрушение нити, равно

---

* Окончание. Начало в №6 за 2003г.

$$\sigma^*_f = E_f \varepsilon_1.$$

Отношение предела прочности нити к пределу прочности волокна равно отношению модуля упругости нити к модулю упругости волокна и составляет

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_f^*} = \frac{E_1}{E_f} = \left[\cos^2\beta - 2v^2\left(1+\cos^2\beta + \frac{4\ln\cos\beta}{\mathrm{tg}^2\beta}\right)\right].$$

Предел прочности нити определяется формулой

$$\sigma_1^* = \sigma_f^*\left[\cos^2\beta - 2v^2\left(1+\cos^2\beta + \frac{4\ln\cos\beta}{\mathrm{tg}^2\beta}\right)\right]. \quad (1)$$

В расчетах прочности нити необходимо учесть коэффициент реализации средней прочности волокон [1].

При

$$\beta = 29{,}5° \; \cos^2\beta = 0{,}7575,$$

$$\left(1+\cos^2\beta + \frac{4\ln\cos\beta}{\mathrm{tg}^2\beta}\right) = 0{,}0224.$$

Отсюда ясно, что для одиночных нитей единственный упругий модуль, который надо учитывать, $C_{11} = E_f\cos^2\beta$. Тем не менее изложенная здесь теория позволяет рассмотреть напряженно-деформированное состояние таких сложных структур, как скрученные между собой в два и более сложений одиночные нити.

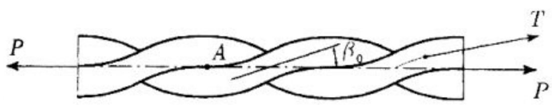

Рис. 1

Скрученная нить представляет собой две одинаковые, вписанные одна в другую, винтовые линии, радиус осевой линии каждой из которых равен радиусу поперечного сечения нити (рис. 1). Сечение каждой из двух нитей представляет собой круг радиусом R, а осевая линия нити – винтовую линию с углом подъема β_0 и радиусом, равным радиусу поперечного сечения крученой нити, то есть тоже R.

Кривизна винтовой линии является постоянной и равна

$$\kappa_3 = \frac{\sin^2\beta_0}{R},$$

кручение

$$\kappa_1 = \frac{\sin\beta_0\cos\beta_0}{R}.$$

Здесь под кручением следует понимать первую компоненту вектора Дарбу, характеризующего меру отклонения кривой от плоской формы. Напомним, что вектором Дарбу называется вектор, который определяет вращение естественных осей при движении точки по кривой. У винтовой линии главная нормаль ν пересекает ось нити под прямым углом и совпадает с ее радиусом.

Возьмем на поверхности одной нити точку касания A (рис. 1). Вследствие свойств винтовой линии указанная нормаль ν в точке A является одновременно нормалью к поверхности второй изогнутой по винтовой линии нити. Последовательность точек касания A образует ось крученой нити. Ось крученой нити является прямой линией контакта нитей.

Построим на этой оси вспомогательный цилиндр радиусом R. На поверхности этого цилиндра будут расположены винтовые осевые упругие линии нитей. Рассмотрим, как преобразуется матрица коэффициентов $[C_{ij}]$ при переходе к другим осям координат, связанным с осью крученой нити.

Введем ортогональную систему координат, связанную с осевой линией упругой линии. Три вектора: касательная τ, главная нормаль ν и бинормаль β образуют естественный трехгранник винтовой линии. Главная нормаль к винтовой линии во всех ее точках совпадает с нормалью к цилиндру.

В некоторой точке M на упругой линии зададим цилиндрическую систему координат (e_x, e_r, e_φ). Расположим оси таким образом, чтобы ось ν естественного трехгранника совпала с осью e_r, направленной к центру нити, а ось e_x направим вдоль оси нити. Цилиндрические оси образуют правую тройку векторов, повернутых относительно оси v, совпадающей с направлением оси e_r, на угол β_0.

Выражения, позволяющие переходить от одного ортогонального базиса к другому, имеют вид

$$e_x = e_\tau \cos\beta_0 + e_\beta \sin\beta_0,$$
$$e_r = e_v,$$
$$e_\varphi = -e_\tau \sin\beta_0 + e_\beta \cos\beta_0.$$

Соответствующая матрица перехода запишется в виде

$$\ell_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_\tau & e_v & e_\beta \end{array} \\ \begin{array}{c} e_x \\ e_r \\ e_\varphi \end{array} & \begin{bmatrix} \cos\beta_0 & 0 & \sin\beta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta_0 & 0 & \cos\beta_0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Элементы матрицы $[\ell_{ij}]$ можно рассматривать как направляющие косинусы между векторами базисов $\{e_\tau\ e_v\ e_\beta\}$ и $\{e_x\ e_r\ e_\varphi\}$.

Матрица коэффициентов жесткости C_{ij} при переходе от упругой линии одиночной нити к крученой нити преобразуется по формуле

$$C^*_{i\ell} = C_{ik} g_{ij} g_{\ell k}. \qquad (2)$$

Коэффициенты g_{ij} имеют значения, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

i \ J	1	2	3	4	5	6
1	$\cos^2\beta_0$	0	$\sin^2\beta_0$	0	$2\sin\beta_0\cos\beta_0$	0
2	0	1	0	0	0	0
3	$\sin^2\beta_0$	0	$\cos^2\beta_0$	0	$-2\sin\beta_0\cos\beta_0$	0
4	0	0	0	$\cos\beta_0$	0	$\sin\beta_0$
5	$-\sin\beta_0\cos\beta_0$	0	$\sin\beta_0\cos\beta_0$	0	$\cos^2\beta_0-\sin^2\beta_0$	0
6	0	0	0	$-\sin\beta_0$	0	$\cos\beta_0$

В результате преобразования матрицы $[C_{ij}]$ коэффициентов жесткости одиночной нити, ориентированной под углом β_0 относительно оси x_1 крученой нити, получим элементы матрицы $\left[C_{ij}^{\beta_0}\right]$ внутренней жесткости упругой винтовой линии.

Прежде всего подчеркнем, что трансверсально-изотропный материал при повороте осей координат вокруг главной нормали в новых координатах уже не является монотропным. Если бы мы повернули оси координат не вокруг одной оси, а произвольно, то имели бы 21 коэффициент, то есть поведение материала не отличалось бы от полностью анизотропного состояния. Поэтому следует определить все необходимые для вычисления модуля упругости $E_1^{\beta_0}$ постоянные жесткости нити.

Уравнения равновесия при одноосном растяжении крученой нити в данном случае имеют вид, аналогичный системе [2 (8)]:

$$\sigma_1 = C_{11}^{\beta_0}\varepsilon_1 + C_{12}^{\beta_0}\varepsilon_2 + C_{13}^{\beta_0}\varepsilon_3,$$
$$0 = C_{12}^{\beta_0}\varepsilon_1 + C_{22}^{\beta_0}\varepsilon_2 + C_{23}^{\beta_0}\varepsilon_3,$$
$$0 = C_{13}^{\beta_0}\varepsilon_1 + C_{23}^{\beta_0}\varepsilon_2 + C_{33}^{\beta_0}\varepsilon_3.$$

Теперь формула для определения модуля упругости одиночной нити в составе крученой нити выглядит так:

$$E_1^{\beta_0} = C_{11}^{\beta_0} - \frac{\left(C_{12}^{\beta_0}\right)^2 C_{33}^{\beta_0} + \left(C_{13}^{\beta_0}\right)^2 C_{22}^{\beta_0} - 2C_{12}^{\beta_0}C_{13}^{\beta_0}C_{23}^{\beta_0}}{C_{22}^{\beta_0}C_{33}^{\beta_0} - \left(C_{23}^{\beta_0}\right)^2}. \qquad (3)$$

В соответствии с формулой (12) и коэффициентами g_{ij} (табл. 1) запишем:

$$C_{11}^{\beta 0}=C_{11}\cos^4\beta_0+C_{13}\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0+C_{31}\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0+C_{33}\sin^4\beta_0+4C_{55}\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0=$$

$$=E_f\left[\begin{array}{l}\cos^2\beta\cos^4\beta_0+2\nu\left(1+\cos^2\beta+\dfrac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right)\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0+\\+\left(1+\cos^2\beta+\dfrac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right)\sin^4\beta_0-4\left(\cos^2\beta+\dfrac{2\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right)\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0\end{array}\right],$$

$$C_{22}^{\beta 0}=C_{22}=E_f\left(1+\cos^2\beta+\frac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right).$$

$$C_{33}^{\beta 0}=C_{11}\sin^4\beta_0+C_{13}\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0+C_{31}\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0+C_{33}\cos^4\beta_0+C_{55}4\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0=$$
$$=E_f\cos^2\beta\sin^4\beta_0+2E_f\nu\left(1+\cos^2\beta+\frac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right)\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0+E_f\left(1+\cos^2\beta+\frac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right)+$$
$$+4\left(-\cos^2\beta_0-\frac{2\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right)\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0,$$

$$C_{12}^{\beta 0}=C_{12}\cos^2\beta_0+C_{32}\sin^2\beta_0=E_f\nu\left(1+\cos^2\beta+\frac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right),$$

$$C_{13}^{\beta 0}=C_{11}\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0+C_{13}\cos^4\beta_0+C_{31}\sin^4\beta_0+C_{33}\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0+$$
$$+C_{55}(-4\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0)=E_f\cos^2\beta\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0+$$
$$+E_f\nu\left(1+\cos^2\beta+\frac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right)(\sin^4\beta_0+\cos^4\beta_0)+$$
$$+E_f\left(1+\cos^2\beta+\frac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right)\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0-4E_f\left(-\cos^2\beta-\frac{2\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right)\sin^2\beta_0\cos^2\beta_0,$$

$$C_{23}^{\beta 0}=C_{21}\sin^2\beta_0+C_{23}\cos^2\beta_0=E_f\nu\left(1+\cos^2\beta+\frac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right).$$

Отметим еще раз, что в повернутой на угол β_0 системе координат число упругих постоянных, отличных от нуля, превышает число упругих констант трансверсально-изотропной нити, равное 5. Вычислить все коэффициенты жесткости по формуле (2), как это сделано для шести упругих постоянных, входящих в выражение (3) для определения модуля упругости одиночной нити в составе крученой нити, несложно, но в этом сейчас нет необходимости.

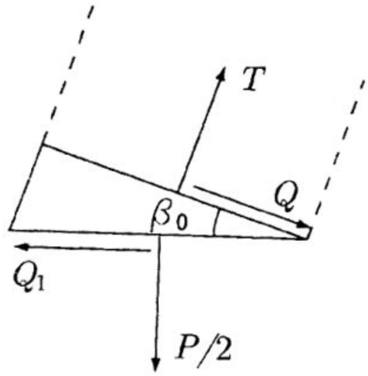

Рис. 2

Итак, модуль $E_1^{\beta_0}$ найден и в соответствии с написанным в первом абзаце планом решения можно проводить расчеты на прочность и жесткость скрученной нити, причем изложенная теория не ограничивает ни число сложений, ни расположение компонентов относительно оси крученой нити. В [3] рассмотрено силовое взаимодействие одиночных нитей с натяжением T в составе крученой нити, нагружаемой усилием P. Из условий равновесия сил, действующих на элемент нити, выделенный сечениями, нормальными к оси крученой нити и к оси отдельной нити (рис. 2), имеем

$$T - Q_1 \sin\beta_0 - \frac{P}{2}\cos\beta_0 = 0.$$

В [3] это первое из уравнений [2 (9)] с другим обозначением внешней нагрузки. Там же получено выражение, связывающее силу, действующую в сечении крученой нити Q_l, с контактной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q, возникающей между нитями вдоль винтовой линии: $Q_1 = qR\text{ctg}\beta_0$.

Если ввести приведенную к осевой линии нити контактную нагрузку q_0, равную $q_0 = q\cos\beta_0$, то можно написать

$$P = 2\left(\frac{T}{\cos\beta_0} - \frac{q_0 R}{\cos\beta_0}\right). \qquad (4)$$

Величину q_0 найдем из уравнений [1]:

$$q_0 R^2(\text{ctg}^2\beta_0 - 1) - \frac{P}{2}R\cos\beta_0 = EI\frac{\sin^2\beta_0}{R},$$

$$2q_0 R^2 \text{ctg}^2\beta_0 - \frac{P}{2}R\sin\beta_0 = GI_p\,\frac{\sin\beta\cos\beta_0}{R}.$$

Отсюда

$$q_0 = \frac{GI_p\cos^2\beta_0 - EI\sin^2\beta_0}{R^3(1+\text{ctg}^2\beta_0)}. \qquad (5)$$

Прочность крученой нити определяется прочностью ее компонентов, разрыв любой из одиночных нитей приводит к разрушению всей нити. Как и ранее (формула (1)), отношение предела прочности нити к пределу прочности волокна равно отношению модуля упругости нити к модулю упругости волокна и равно $\dfrac{\sigma_1^{\beta_0^*}}{\sigma_f^*} = \dfrac{E_1^{\beta_0}}{E_f}$.

Переходя от напряжений к силам и принимая во внимание, что число волокон каждое с прочностью P_f в одиночной нити составляет $m = \dfrac{T_{\text{нити}}}{T_f}$, запишем формулу прочности нити, образующей крученую нить, в форме

$$P^{\beta_0} = P_f\,\frac{E_1^{\beta_0}}{E_f}mk,$$

где $k = \dfrac{(\alpha e)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}$ – коэффициент реализации прочности волокон в нити, определяемый из распределения Вейбулла с параметрами, один из которых α. Теперь формулу прочности крученой нити (4) можно представить в виде

$$P = \frac{2}{\cos\beta_0}\left(P_f\,\frac{E_1^{\beta_0}}{E_f}mk - q_0 R\right). \qquad (6)$$

Все входящие сюда величины или известны (P_f, β_0, $T_{нити}$, T_f, R), или вычисляются по приведенным в работе соотношениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: РИО МГТУ им. А. Н. Косыгина, 2001.

2. *Щербаков В.П. и др.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №6. С.81…86.

3. *Щербаков В.П., Цыганов И.Б., Заваруев В.А.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №3. С.91…94.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 30.09.03.