

УДК 677.486.6

НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЛОКОН И ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИХ ОРИЕНТАЦИИ В ПЛОСКОСТИ ПРОДУКТА

И.П. КОРНЮХИН, Т.А. КОРНЮХИНА

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)

В работе ставится задача получения аналитического выражения для функции плотности углового распределения участков волокон для плоских структур.

Для решения этой задачи используется подход, основанный на использовании известного соотношения [1], связывающего плотности распределения двух случайных величин y и x , между которыми существует строгая функциональная зависимость $y(x)$:

$$\ell(y) = \ell(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|, \quad (1)$$

где $\ell(x(y))$ и $\ell(y)$ – плотности распределения двух случайных величин x и y , связанных строгой функциональной зависимостью соответственно.

В качестве x и y будем рассматривать углы наклона бесконечно малого участка волокна к фиксированному направлению в двух различных состояниях волокнистого материала: недеформированном и деформированном. В качестве начального выбирается такое состояние, для которого плотность распределения известна заранее, а именно – полностью неупорядоченное состояние, в котором все направления ориентации волокон (линейных элементов) равновероятны.

Рассмотрим волокнистый материал, который можно представить как плоский. Для такого материала при отсутствии преимущественной ориентации, когда в интервале углов от $-\pi/2$ до $\pi/2$ все направления равновероятны, плотность углового распределения можно представить как

$$\ell(x(y)) = \frac{1}{\pi} \quad (2)$$

Теперь для нахождения функции углового распределения в соответствии с уравнением (1) необходимо найти зависимость $y(x)$.

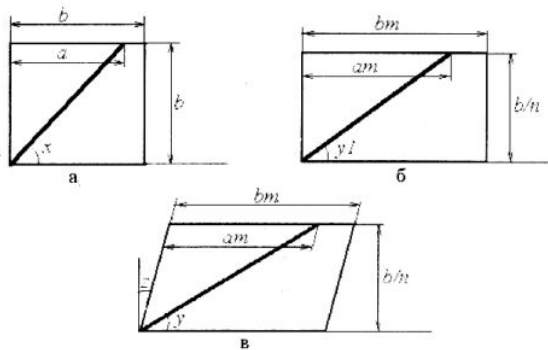


Рис. 1

Вывод этой зависимости иллюстрируется схемами, представленными на рис.1, где показано изменение ориентации линейного элемента при деформации. Начальное состояние моделируется выделенным в линейной структуре квадратным по форме (ввиду отсутствия преимущественного направления) фрагментом (рис.1-а). Произвольный элемент этой структуры (бесконечно малый участок какого-нибудь волокна) наклонен к предполагаемому направлению вытягивания под углом x , для которого

$$\operatorname{ctg} x = a/b \quad (3)$$

Отрезки a и b показаны на рис. 1-а. Рассмотрим выделенный фрагмент после деформации (рис.1-б). Он приобрел форму прямоугольника – одна из сторон квадрата увеличилась в m , другая – сократилась в n

раз, причем в общем случае $m \neq n$. Предположим, что пропорционально изменились и длины отрезков a и b , так что угол наклона y_1 рассматриваемого элемента к выбранному направлению после деформации определяется формулой

$$\operatorname{ctg} y_1 = \frac{am}{b/n} \quad (4)$$

и связан с углом наклона x в исходном состоянии выражением

$$\operatorname{ctg} y_1 = mn \operatorname{ctg} x \quad (5)$$

В этих преобразованиях учитывалась формула (3). Возможный при вытягивании перекокс превращает прямоугольник в параллелограмм (рис.1-в). В этом состоянии угол наклона y определяется как

$$\operatorname{ctg} y = \frac{(b/n) \operatorname{tg} z + ma}{b/n}$$

или с учетом (3):

$$\operatorname{ctg} y = mn \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} z \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) описывают искомую функциональную связь между случайными величинами y и x . При получении этих уравнений было использовано формальное предположение о пропорциональном изменении частей выделенного фрагмента при его деформации. Физически такому предположению отвечала бы ситуация, при которой деформировалась бы пластичная матрица с заделанным в нее тонким жестким стержнем. В отличие от этой модели рассматриваемый бесконечно малый участок образца не является изолированным и связан с остальной частью волокна. Еще одно отличие состоит в том, что при деформации волокнистого материала волокна могут проскальзывать одно относительно другого – в пластичной матрице это исключено.

Таким образом, следует ожидать, что параметры m , n и угол z в уравнениях (5) и (6) не будут описывать реальное удлине-

ние, сокращение поперечных размеров и угол перекоса волокнистого фрагмента соответственно. В связи с допущениями, принятыми при нахождении зависимостей (5), (6), целесообразно сопоставить с экспериментом функцию распределения, основанную на этих уравнениях.

Для получения плотности углового распределения выразим x как функцию y из уравнения (6) и подставим полученное выражение, а также соотношение (2) в формулу (1). Введя более удобные обозначения $\alpha \equiv y$, $\lambda \equiv mp$ и $\omega \equiv tg z$, представим плотность углового распределения волокон в виде

$$\ell(\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + (\cos \alpha - \omega \sin \alpha)^2}, \quad (7)$$

где λ и ω рассматриваются как параметры функции распределения вероятностей. Параметр ω учитывает наличие перекоса при деформации волокнистого материала.

На практике перекося волоконистых структур в естественных условиях (при отсутствии целенаправленных воздействий) практически отсутствует и в дальнейшем рассматриваться не будет. При отсутствии перекоса $\omega = 0$ и выражение для плотности углового распределения упрощается:

$$\ell(\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}. \quad (8)$$

Значение параметра распределения $\lambda = 1$ определяет отсутствие преимущественного направления ориентации; при этом формула (8) автоматически переходит в формулу (2). При $\lambda > 1$ наблюдается преимущественная ориентация волокон в выделенном направлении ($\alpha = 0$); такая ситуация наблюдается при вытягивании волокнистого материала в направлении оси $\alpha = 0$.

Предельный случай $\lambda \rightarrow \infty$ для функции (8) приводит к следующей ее форме:

$$\begin{aligned} \ell(0) &\rightarrow \infty, \\ \ell(0 < |\alpha| \leq \pi/2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Функция (9) близка по свойствам к δ -функции Дирака [2], но отличается от нее тем, что она обращается в 0 лишь на ограниченном интервале, в то время как δ -функция обращается в ноль на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ за исключением точки 0, где она стремится к бесконечности, как и $\delta(0)$ -функция Дирака.

Кроме того, известно [2], что интеграл от δ -функции на бесконечном интервале равен 1, в то время как интеграл от плотности углового распределения (8) на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ в силу нормировки равен 1 при любом значении λ , в том числе и при предельном переходе $\lambda \rightarrow \infty$. Физически такой предельный переход характеризует встречающуюся в исследованиях модельную структуру волокнистого материала, когда все волокна параллелизованы в заданном направлении. Другой предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ превращает плотность распределения в функцию Дирака типа $\delta(\pm \pi/2)$, характеризующую полную параллелизацию волокон в направлении, перпендикулярном к заданному.

Выше отмечалось, что значения $\lambda > 1$ определяют состояние волокнистого материала, вытянутого в направлении оси $\alpha = 0$. Значения $\lambda < 1$ характерны для состояния сжатия в направлении той же оси. Если в уравнении (8) формально заменить λ на $\lambda_1 = 1/\lambda$, а α — на $\alpha_1 = \alpha \pm \pi/2$, получим то же самое выражение (8).

Таким образом, плотность распределения для сжатого волокнистого материала можно получить из соответствующей функции для растянутого материала путем замены параметра распределения λ на обратную величину и смещения по оси абсцисс на угол, равный $\pi/2$.

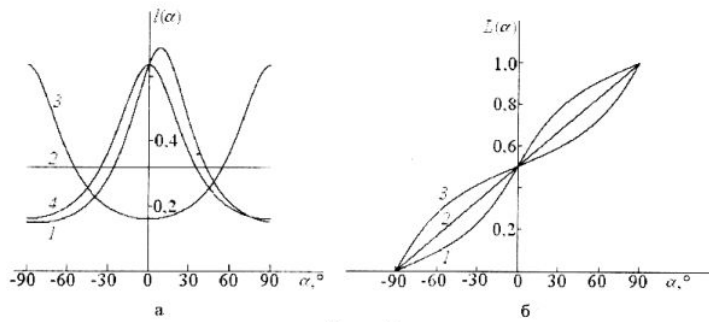


Рис. 2

Графики функции плотности углового распределения представлены на рис.2-а. Кривые 1, 2, 3 описывают функцию $l(\alpha)$ при значениях параметра распределения λ , равных соответственно 2 (растяжение); 1 (полностью хаотическая структура); 0,5 (сжатие) при отсутствии перекоса ($\omega = 0$). Кривая 4 относится к случаю растяжения с перекосом.

Функцию распределения $L(\alpha)$, соответствующую плотности распределения $l(\alpha)$, заданной формулой (8), можно найти как

$$L(\alpha) = \int_{-\pi/2}^{\alpha} l(\alpha) d\alpha, \quad (10)$$

что дает

$$L(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \text{arccctg} \left(\frac{1}{\lambda^2} \text{ctg} \alpha \right) \right]. \quad (11)$$

Графики функции $L(\alpha)$ представлены на рис. 2-б, причем кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям параметра распределения λ , равным 2; 1; 0,5.

Экспериментальная проверка полученной зависимости при $\omega = 0$ осуществлялась методом малоуглового рассеяния лазерного излучения. Было установлено, что функция (8) описывает плотность углового

распределения участков волокон в таких полуфабрикатах прядильного производства, как ватка-прочес и мычка.

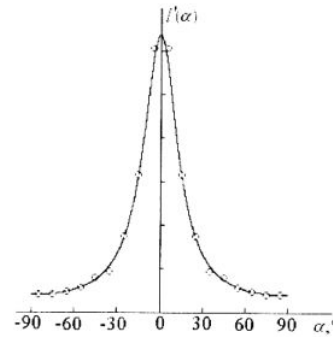


Рис. 3

В качестве примера на рис.3 ненормированная плотность распределения сопоставлена с опытными данными для мычки.

При известной функции углового распределения нетрудно получить интегральные показатели, характеризующие ориентацию – средние значения модуля угла ориентации $|\bar{\alpha}|$ и среднее значение косинуса угла ориентации $\cos \alpha$. Заметим, что определение среднего угла ориентации лишено смысла, поскольку при любом значении λ величина $\bar{\alpha} \equiv 0$ в силу четности функции $l(\alpha)$, определяемой уравнением (8):

$$|\bar{\alpha}| \equiv 2 \int_0^{\pi/2} \alpha l(\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)^{2k+1}. \quad (12)$$

Значение интеграла в формуле (12) с учетом подстановки (8) определено по таблицам [3].

Предельные значения $|\overline{\alpha}|$ соответственно равны

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\overline{\alpha}| = 0, \lim_{\lambda \rightarrow 1} |\overline{\alpha}| = \pi/4, \lim_{\lambda \rightarrow 0} |\overline{\alpha}| = \pi/2. \quad (13)$$

$$\overline{\cos \alpha} = \begin{cases} \frac{2\lambda}{\pi\sqrt{\lambda^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda^2-1} & \text{при } \lambda > 1, \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda^2-1}}{1-\sqrt{\lambda^2-1}} & \text{при } 0 < \lambda < 1, \end{cases} \quad (14)$$

а его предельные значения соответственно равны

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \overline{\cos \alpha} = 1, \lim_{\lambda \rightarrow 1} \overline{\cos \alpha} = 2/\pi, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \overline{\cos \alpha} = 0.$$

Введенные на основе полученного распределения показатели ориентации волокон хорошо коррелируют с аналогичными показателями, полученными прямыми методами, основанными на непосредственном анализе формы и ориентации отдельных волокон и их участков в полуфабрикате, а также с показателями, полученными другими косвенными методами.

Первая и последняя формулы в (13) характеризуют состояния полностью параллелизованных волокон в направлениях $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ соответственно, а средняя формула – хаотическое состояние волокон.

Среднее значение косинуса угла ориентации вычисляется аналогично

ВЫВОДЫ

Для плоской волокнистой структуры получена функция углового распределения волокон по длине, найдены значения средних показателей ориентации и проанализированы предельные случаи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1968.
2. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1972.
3. Рыжик А.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. – М.: Наука, 1951.

Рекомендована кафедрой промышленной теплоэнергетики. Поступила 04.02.04.