УДК 677.053

УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БАЛЛОНИРОВАНИЯ НИТИ

В.Л. МАХОВЕР, А.Б. БРУТ-БРУЛЯКО

(Ивановская государственная текстильная академия, Костромской государственный технологический университет)

В результате действия ряда сил: тяжести, сопротивления воздуха, инерции и Кориолиса баллонирующая нить при своем движении принимает форму линии двоякой кривизны. Одним из вариантов упрощения задачи о баллонировании нити является сведение математической модели баллона к задаче вращения нити вокруг неподвижной оси (рис. 1).

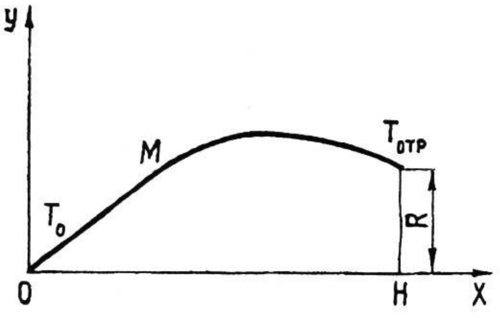

Рис. 1

Считая баллон плоским, без учета сил тяжести, Кориолиса и сопротивления воздуха можно получить приближенную математическую модель процесса баллонирования нити [1]:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0\,;\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=-\mu\omega^2 y\,, \qquad (1)$$

где T – натяжение нити в произвольной точке M (рис. 1), H; s – дуговая координата точки M по контуру баллона, отсчитываемая от начала координат, м; μ – масса единицы длины нити, кг/м; ω – угловая скорость вращения нити относительно оси Ox, c^{-1}.

Из первого уравнения (1) имеем:

$$T\frac{dx}{ds}=c_1 \text{ или } T\frac{dx}{\sqrt{1+y'^2}dx}=c_1\,, \qquad (2)$$

где c_1 – произвольная постоянная, $y'=dy/dx$.

Из (2) следует, что

$$T=c_1\sqrt{1+y'^2}\,. \qquad (3)$$

После подстановки (3) во второе уравнение (1) и соответствующих сокращений, с учетом того, что $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$, найдем:

$$\frac{d}{dx}(c_1 y')=-\mu\omega^2 y\sqrt{1+y'^2}\,. \qquad (4)$$

Отсюда:

$$y''=-\frac{\mu\omega^2}{c_1}y\sqrt{1+y'^2}\,. \qquad (5)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (5) второго порядка определяет форму нити $y=y(x)$. Известно решение [1] данного уравнения при ограничении $y'^2 \ll 1$. Решим уравнение (5) без указанного допущения.

Понизим порядок уравнения, приняв $y'=V$, $y''=\frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx}=V\frac{dV}{dy}$.

Подставив принятые обозначения в (5) и разделив переменные, найдем

$$\frac{d\left(V^2\right)}{2\sqrt{1+V^2}}=-\frac{\mu\omega^2}{c_1}ydy. \qquad (6)$$

После интегрирования получим:

$$\sqrt{1+V^2}=c_2-\frac{\mu\omega^2y^2}{2c_1},$$

где c_2 – постоянная интегрирования.

Так как V=dy/dx, из последнего выражения будем иметь:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(c_2-\frac{\mu\omega^2}{2c_1}y^2\right)^2-1}. \qquad (7)$$

Поскольку y(0)=0 (рис. 1), из (7) находим

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\sqrt{c_2^2-1}. \qquad (8)$$

Из (3):

$$T_{x=0}=T_0=c_1\sqrt{1+y'^2\big|_{x=0}}, \qquad (9)$$

где T_0 – натяжение нити в вершине баллона (рис. 1).

С учетом выражения (8) из (9) получим:

$$T_0=c_1\sqrt{1+c_2^2-1}=c_1c_2. \qquad (10)$$

Выразив из (10) $c_2=T_0/c_1$ и подставив это значение в (7), будем иметь:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{T_0}{c_1}-\frac{\mu\omega^2}{2c_1}y^2\right)^2-1}. \qquad (11)$$

После несложных преобразований подкоренное выражение этого уравнения приводится к виду:

$$\left(\frac{T_0}{c_1}-\frac{\mu\omega^2}{2c_1}y^2\right)^2-1=\frac{\left(T_0^2-c_1^2\right)}{c_1^2}\left[1-\frac{\mu\omega^2y^2}{2\left(T_0-c_1\right)}\right]\left[1-\frac{\mu\omega^2y^2}{2\left(T_0+c_1\right)}\right]. \qquad (12)$$

Из уравнений (11) и (12) получаем

$$\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{\left[1-\frac{\mu\omega^2y^2}{2\left(T_0-c_1\right)}\right]\left[1-\frac{\mu\omega^2y^2}{2\left(T_0+c_1\right)}\right]}}=\frac{\sqrt{T_0^2-c_1^2}}{c_1}\int_0^x dx, \qquad (13)$$

где пределы интегрирования поставлены из условия, что $y(0)=0$ (рис. 1).

Обозначим:

$$\frac{\sqrt{\mu}\omega y}{\sqrt{2}\sqrt{\left(T_0-c_1\right)}}=z. \qquad (14)$$

Тогда:

$$dy=\sqrt{\frac{2}{\mu}}\frac{\sqrt{T_0-c_1}}{\omega}dz,$$

$$\frac{\mu\omega^2y^2}{2\left(T_0+c_1\right)}=\frac{T_0-c_1}{T_0+c_1}z^2 \qquad (15)$$

и уравнение (13) будет

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{\omega y}{\sqrt{T_0-c_1}}} \frac{\sqrt{\frac{2}{\mu}}\frac{\sqrt{T_0-c_1}}{\omega}dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{T_0-c_1}{T_0+c_1}z^2\right)}}\frac{\sqrt{T_0^2-c_1^2}}{c_1}\int_0^x dx. \qquad (16)$$

Примем $\sqrt{\frac{T_0-c_1}{T_0+c_1}}=k$. (17)

Так как из (9):

$$\frac{T_0}{c_1}=\sqrt{1+y'^2}\Big|_{x=0} \text{ и } y'\big|_{x=0}>0\text{, то } \frac{T_0}{c_1}>1 \text{ и } T_0>c_1.$$

Поэтому $0<k<1$.

Из выражения (16) имеем:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{\omega y}{\sqrt{T_0-c_1}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\frac{\sqrt{\mu}\omega\sqrt{T_0^2-c_1^2}}{c_1\sqrt{2}\sqrt{T_0-c_1}}\int_0^x dx. \qquad (18)$$

Из выражения (17):

$$c_1=T_0(1-k^2)/(1+k^2). \qquad (19)$$

С учетом (19):

$$T_0-c_1=T_0-T_0(1-k^2)/(1+k^2)=$$
$$=2T_0k^2/(1+k^2). \qquad (20)$$

Выразим теперь через k верхний предел в выражении (18):

$$\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{\omega y}{\sqrt{T_0-c_1}}=\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\frac{\omega y}{2}. \qquad (21)$$

Величина перед интегралом правой части (18):

$$\frac{\sqrt{\mu}\omega\sqrt{T_0^2-c_1^2}}{c_1\sqrt{2}\sqrt{T_0-c_1}}=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{\sqrt{T_0+c_1}}{c_1}\omega. \qquad (22)$$

В свою очередь с учетом (19):

$$T_0+c_1=T_0+T_0(1-k^2)/(1+k^2)=2T_0/(1+k^2), \qquad (23)$$

$$\frac{\sqrt{T_0+c_1}}{c_1}=\sqrt{\frac{2}{T_0}}\frac{\sqrt{1+k^2}}{1-k^2}.$$

Подставив второе выражение (23) в (22), найдем:

$$\sqrt{\frac{\mu}{2}}\omega\frac{\sqrt{T_0+c_1}}{c_1}=\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\omega\frac{\sqrt{1+k^2}}{1-k^2}. \qquad (24)$$

Учитывая (21), (22) и (24), выражение (18) примет вид:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\frac{\omega y}{2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=$$
$$=\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\frac{\sqrt{1+k^2}}{1-k^2}\omega x. \qquad (25)$$

Обращая этот эллиптический интеграл, находим:

$$\mathrm{Sn}\left(\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\frac{\sqrt{1+k^2}}{1-k^2}\omega x, k\right)=\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\omega\frac{y}{2}, \quad (26)$$

где Sn – символ эллиптической функции Якоби (синус амплитуды) [2]; k – модуль эллиптического интеграла.

Обозначив

$$\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\frac{\sqrt{1+k^2}}{1-k^2}\omega x = U_x, \quad (27)$$

из (26) получаем уравнение баллона:

$$y=\frac{2}{\omega}k\sqrt{\frac{T_0}{\mu(1+k^2)}}\mathrm{Sn}(U_x, k). \quad (28)$$

При $x=0$ из (27) $U_x=0$. Следовательно, в (28) $\mathrm{Sn}(0,k)=0$, то есть уравнение (28) удовлетворяет первому граничному условию $y(0)=0$ (рис. 1). Для того, чтобы удовлетворить второму граничному условию $y(H)=R$, где R – радиус баллона в точке отрыва нити от паковки, а H – высота баллона (рис.1), положим в (28) $y=R$, $U_x=U_H$, где $U_H=U_x$ при $x=H$.

Тогда

$$\frac{2}{\omega}k\sqrt{\frac{T_0}{\mu(1+k^2)}}\mathrm{Sn}(U_H, k)=R \quad (29)$$

и второе граничное условие можно записать в виде:

$$\mathrm{Sn}(U_H, k)=\nu\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}, \quad (30)$$

где

$$\nu=\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\frac{\omega}{2}R. \quad (31)$$

Уравнение (30), где $U_H=U_H(k)$, служит условием для определения модуля **k**.

Найдем выражение для натяжения T баллонирующей нити.

Из (28) получаем

$$y'=\frac{2k}{1-k^2}\mathrm{Cn}(U_x, k)\mathrm{dn}(U_x, k), \quad (32)$$

где $\mathrm{Cn}(U_x, k)$, $\mathrm{dn}(U_x, k)$ – соответствующие эллиптические функции Якоби [2].

Подставив это выражение и формулу (19) в (3), находим натяжение нити в баллоне:

$$T=\frac{T_0}{1+k^2}\sqrt{(1-k^2)^2+4k^2\mathrm{Cn}^2(U_x, k)\mathrm{dn}^2(U_x, k)}. \quad (33)$$

Отсюда натяжение нити в точке отрыва ее от паковки (рис.1):

$$T_{отр}=\frac{T_0}{1+k^2}\sqrt{(1-k^2)^2+4k^2\mathrm{Cn}^2(U_H, k)\mathrm{dn}^2(U_H, k)}. \quad (34)$$

В качестве примера применения полученных зависимостей принимаем [3, с.133]: $\mu=0{,}42\cdot10^{-4}$ кг/м; $T_0=0{,}052$ Н; $\omega=700$ с$^{-1}$; $H=0{,}1$ м; $R=0{,}01$ м. По формулам (31) и (27) находим $\nu=0{,}0995$ и

$$U_H=1{,}9894\sqrt{1+k^2}/\sqrt{1-k^2}. \quad (35)$$

В уравнении (30) обозначим

$$\nu\sqrt{1+k^2}/k=0{,}0995\sqrt{1+k^2}/k=f_1,$$
$$\mathrm{Sn}(U_H, k)=f_2. \quad (36)$$

Расчеты по формулам (35) и (36) с применением табл. 1 и 3 приложения [2] приведены в табл. 1.

Таблица 1

θ_i, град	5	10	20	30	32	34	36	40	50
$k_i = \sin\theta_i$	0,0872	0,1736	0,3420	0,5000	0,5299	0,5592	0,5878	0,6428	0,7660
f_1	1,1456	0,5814	0,3074	0,2224	0,2125	0,2038	0,1963	0,1840	0,1636
U_{Hi}	2,0122	2,0819	2,3810	2,9656	3,1305	3,3164	3,5258	4,0300	6,0652
K_i	1,5738	1,5828	1,6200	1,6857	1,7028	1,7214	1,7415	1,7868	1,9356
φ_i, град	64,97	61,80	48,61	23,10	15,71	7,24	2,45	-25,27	-80,42
$f_2 = \sin\varphi_i$	0,9061	0,8813	0,7502	0,3923	0,2708	0,1260	-0,0428	-0,4268	-0,9860
θ_i, град	52	54	56	60	65	70	75	80	85
$k_i = \sin\theta_i$	0,7880	0,8090	0,8290	0,8660	0,9063	0,9397	0,9658	0,9848	0,9962
f_1	0,1608	0,1582	0,1559	0,1519	0,1482	0,1452	0,1432	0,1418	0,1410
U_{Hi}	6,6819	7,4060	8,2623	10,5264	15,0311	23,3360	41,2589	92,5498	370,188
K_i	1,9728	2,0133	2,0570	2,1565	2,3088	2,5045	2,7680	3,1534	3,8317
φ_i, град	61,50	35,53	1,95	82,60	57,86	72,94	86,07	76,78	79,50
$f_2 = \sin\varphi_i$	-0,8788	-0,5812	0,0340	0,9916	-0,8467	0,9560	-0,9976	0,9735	0,9832

Примечание. В расчетах использованы формулы приведения: $SnU_H = Sn(2K - U_H)$, $SnU_H = Sn(2K - m4K)$, $m = 1,2,...$, где K – полный эллиптический интеграл первого рода [2].

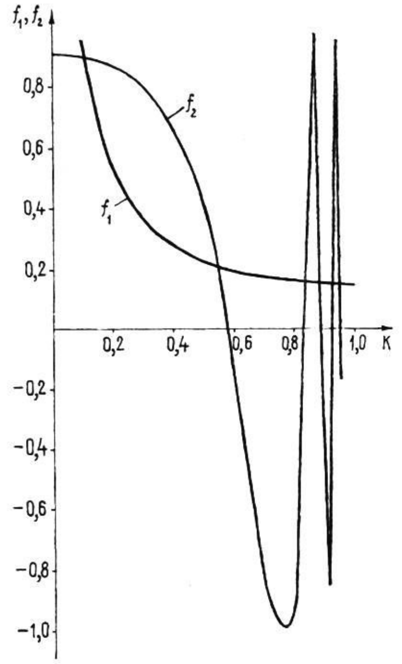

Рис. 2

По данным табл. 1 на рис. 2 построены графики функций $f_1(k)$ и $f_2(k)$. Согласно условию (30) точки пересечения этих графиков дают несколько значений параметра k. Первые из них будут: $k_1 = 0{,}110$; $k_2 = 0{,}543$; $k_3 = 0{,}832$.

Наблюдения показывают, что в вершине баллона сматывания производная $y'(0) \le 1$. Тогда из (9) $(T_0/c_1) \le \sqrt{2}$ и с учетом (19) найдем $k \le (\sqrt{2} - 1) = 0{,}414$. Этому условию удовлетворяет значение k=0,110.

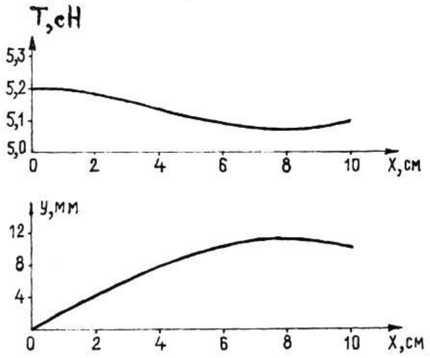

Рис. 3

После подстановки указанного значения параметра k в формулы (28) и (33) и соответствующих расчетов получаем характер изменения формы баллона и натяжения нити, изображенный на рис. 3-а,б. В общем случае число волн в баллоне можно определить по формуле: $n = H/2K$.

ВЫВОДЫ

Получено точное решение приближенной математической модели процесса баллонирования нити, позволяющее рассчитать форму баллона и натяжение нити в баллоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити.– М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001.

2. *Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. – М.: ОНТИ СССР, 1936.

3. *Алешин П.А., Полетаев В.Н.* Лабораторный практикум по ткачеству. – М.: Легкая индустрия, 1979.

Рекомендована кафедрой ткачества ИГТА. Поступила 27.12.04.