

УДК 66.011

**ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ  
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ АППАРАТАХ  
ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ**

*А.С. БЕЛОУСОВ, Б.С. САЖИН*

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)

Свойства структуры потоков в значительной степени определяют эффективность работы многих аппаратов текстильной и химической промышленности [1]. Структура перемешивания в аппарате определяет интенсивность теплообмена и сепарационные характеристики смесительных аппаратов для утилизации теплоты паровоздушных смесей от теплотехнологического оборудования текстильной промышленности [2].

Известно сильное влияние структуры потоков на характеристики улавливания волокнистых материалов в вихревых пылеуловителях [3]. Качество химических волокон существенно зависит от характера продвижения потока и наличия застойных зон в аппаратах полимеризации [8].

Таким образом, модели структуры в технологических аппаратах со сплошной средой являются неотъемлемой частью расчета процессов и решения задач масштабного перехода [1], [4...7].

Свойства структуры потоков в основном описываются функцией распределения времени пребывания (РВП) частиц потока в аппарате. Дисперсия спектра РВП отражает величину так называемого продольного перемешивания в аппарате – эффективной диффузии  $D$  в направлении движения потока [1], [4...6]. На этом основана аналогия между РВП и решением уравнений нестационарной диффузии.

Обратная величина к эффективной диффузии представляет собой безразмерное число Пекле:  $Pe \sim 1/D$ . Число  $Pe$  также связано с основным параметром другой

распространенной модели – каскадной (ячеечной). Выполняется приближенное соотношение  $Pe = 2 \cdot N_k$  [6], где  $N_k$  – число каскадов (ячеек).

Для многих процессов практический интерес представляет область малых значений параметра Пекле:  $Pe = (2 \div 10)$ . Например, в производствах химических волокон число конструктивных секций в аппарате, или каскадов, составляет от двух до шести [8]; в сушилках для волокнообразующих полимеров значение эффективного параметра  $N_k$  может меняться в диапазоне  $N_k = (1,3 \div 4,5)$  [9].

Для определения РВП в конкретном аппарате эффективным инструментом служит индикаторный метод, при котором отклик системы на входное импульсное возмущение по нейтральному трассеру является дифференциальной функцией РВП.

Уравнение нестационарной диффузии трассера в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $\theta$  – безразмерное время:  $\theta = t/\bar{t}$ ;  $\bar{t}$  – среднее время пребывания в аппарате;  $x$  – безразмерная координата:  $x = z/L$ ;  $L$  – общая длина экспериментального участка;  $C = c/C_0$  – безразмерная концентрация трассера;  $Pe = (WL)/D$  – параметр Пекле;  $W$  – скорость потока.

Определение параметров моделей типа числа Пекле по кривым отклика трассера и является основной задачей при исследова-

нии структуры потоков в технологических аппаратах. В настоящее время для ее решения наибольшее распространение получил метод моментов [4...7].

Суть метода состоит в том, что вместо прямого решения уравнения (1) относительно концентрации индикатора решаются более простые алгебраические уравнения, связывающие искомые параметры и моменты функции отклика. Решение этих уравнений намного проще, чем прямой расчет дифференциальных уравнений типа (1). Однако в связи с ростом мощности компьютеров в последние годы значимость подобных соображений уменьшается и целесообразнее больше внимания уделять точности и эффективности оценок.

С этой точки зрения наиболее выгодно рассмотреть использование нелинейного метода наименьших квадратов (НМНК). Поскольку для линейной задачи МНК теоретически доказана оптимальность оценок [10], то для достаточно гладких функций можно ожидать лучшей эффективности этого метода и в данном нелинейном случае. В то же время в [7] в результате анализа значимости точек на различных участках функции отклика предпочтение по точности отдается методу моментов.

В данной работе предложен метод нелинейного оценивания параметров моделей структур потоков на основе поисковых алгоритмов оптимизации и выполнено сравнительное исследование эффективности метода моментов и НМНК при различных значениях числа Пекле и различной точности эксперимента. Предложена схема статистического (имитационного) моделирования на компьютере процедур определения параметров. Полученные таким образом выборки оценок использовались для анализа методов оценивания.

Пусть  $C(\theta, Pe_0)$  – решение уравнения (1) при импульсном возмущении на входе и некотором значении числа Пекле  $Pe_0$ . Компьютерная имитация эксперимента формировалась следующим образом. Начиная со значения  $\theta = 0$  с дискретным шагом 0,1 к значениям концентрации  $C_i$  в каждой точке по времени  $\theta_i$  добавлялся гауссовский шум  $\xi_i(\sigma)$  с нулевым средним

значением и некоторым среднеквадратическим отклонением  $\sigma$ :

$$C_{i,e} = C_i(\theta_i, Pe_0) + \xi_i(\sigma). \quad (2)$$

Так как значения концентрации индикатора всегда больше нуля, то, если  $C_{i,e}$  после добавления шума становилось  $C_{i,e} \leq 0$ , в этой точке принималось  $C_{i,e} = 0$ . Вследствие того, что решения уравнения (1) унимодальные [5], после прохождения точки экстремума при первом же случае  $C_{i,e} \leq 0$  процесс останавливался, время  $\theta^*$  в этой точке считалось временем окончания эксперимента и также принималось  $C_{i,e} = 0$ .

Такой алгоритм соответствует обычной схеме прекращения отбора проб при ограниченной точности определения выходной концентрации индикатора [4], [5]. К полученным таким образом кривым отклика (2) применялись процедуры расчета по методу моментов и НМНК так же, как они применялись бы к результатам реального эксперимента.

Уравнения связи для моментов различного порядка получены сверткой исходного уравнения (1) по координате  $\theta$  [4], [5]. В случае неограниченной по  $X$  системы (канал бесконечной длины) уравнения связи для модели (1) имеют следующий вид:

$$M_2 = 2/Pe + 8/Pe^2, \quad (3)$$

$$M_3 = 2/Pe^2 + 56/Pe^3, \quad (4)$$

$$M_4 = 12/Pe^2 + 216/Pe^3 + 960/Pe^4. \quad (5)$$

Моменты  $M_k$  определяются по экспериментальным функциям отклика (2):

$$M_k = \int_0^{\theta^*} (\theta - \bar{\theta})^k C_e(\theta) d\theta, \quad (6)$$

где  $\bar{\theta}$  – среднее время пребывания. Интегралы в (6) рассчитывались методом трапеций; поиск корней уравнений (3)...(5) проводился методом секущих и Лаггера.

Параметр Пекле, определенный по какому-либо из уравнений (3)...(5), обозначим соответственно  $Pe_k$ ,  $k=2,3,4$ . Вместо третьего и четвертого моментов иногда

применяют безразмерные коэффициенты асимметрии  $A=M_3/(M_2)^{3/2}$  и эксцесса  $E=M_4/(M_2)^4-3$ . В этом случае уравнения связи получаем комбинацией соответственно уравнений (3) и (4) или (3) и (5), а оценки параметра обозначаем как  $Pe_A$  и  $Pe_E$ .

Определение параметра по методу НМНК основывается на минимизации среднеквадратичного критерия  $S(Pe)$ :

$$\min_{Pe} \{S(Pe) = \sum_{i=1}^{N_R} [(C_{i,e} - C_{i,c}(Pe))]^2\}, \quad (7)$$

где  $C_{i,c}(Pe)$  – решение уравнения (1) для неограниченного по координате  $X$  канала при некотором значении числа  $Pe$  [5];  $N_R$  –

число точек  $R$ -й реализации моделированного эксперимента, определяемое при имитации по времени  $\theta^*$ . Для поиска оптимума использовался метод золотого сечения, обеспечивавший сходимость за 10...15 итераций.

Для каждого значения числа Пекле  $Pe_0$  и некоторой точности эксперимента  $\sigma$  процедура (2)... (7) повторялась  $N$  раз (обычно  $N=40$ ). По полученным выборкам определялись средние значения и дисперсии оценок для каждого из вариантов методов. Таким образом получались точки на рис. 1 и 2 при одном значении критерия  $Pe_0$ . Далее вся схема повторялась для других значений  $Pe_0$  или  $\sigma$ .

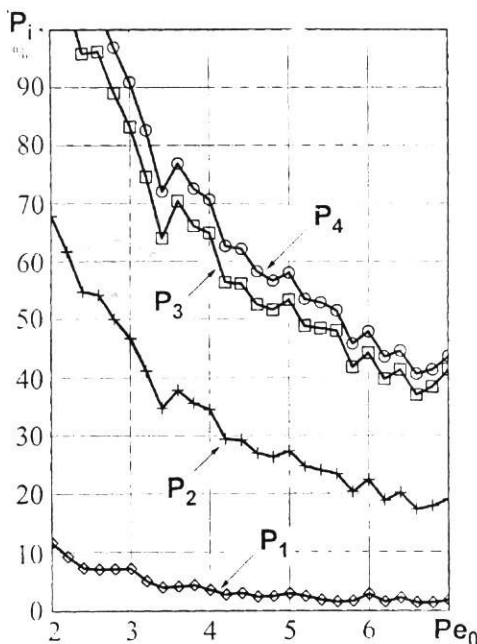


Рис. 1

На рис. 1 представлены средние относительные отклонения оценок от истинного значения  $Pe_0$ , а на рис. 2 – среднеквадратичные отклонения оценок от их средних значений. Информация на рис. 1 и 2 характеризует состоятельность и эффективность рассматриваемых методов для аппаратов с различной величиной продольного перемешивания. Среднеквадратичное отклонение ошибки здесь принято

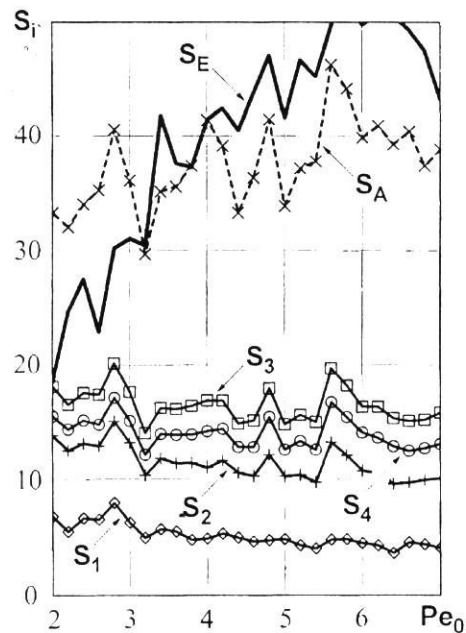


Рис. 2

$\sigma=0,03$ , что соответствует характерной величине воспроизводимости эксперимента методом трассера [5].

Средние относительные отклонения оценок определялись как:

$$P_i = \left( \left| \frac{\sum_{j=1}^N Pe_i^j}{N} - Pe_0 \right| \right) \frac{100}{Pe_0}, \quad (8)$$

где  $i=1$  – соответствует определению па-

раметра по НМНК;  $i=2,3,4$  – по соответствующему моменту;  $i=A,E$  – по коэффициентам асимметрии и эксцесса;  $j$  – номер эксперимента в выборке.

Относительные среднеквадратичные отклонения оценок  $S_i$ , представленные на рис. 2, вычислялись следующим образом:

$$S_i = \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{(\overline{Pe}_i^j - \overline{Pe}_i)^2}{(N-1)}} \frac{100}{\overline{Pe}_i}, \quad (9)$$

где  $\overline{Pe}_i$  – среднее значение оценки  $i$ -го метода для данной выборки;  $i, j$  – определяют метод расчета и номер эксперимента так же, как и в уравнении (8).

Как видно из рис. 1 и 2, в рассматриваемой области метод НМНК является оптимальным и обеспечивает на порядок более высокую точность, чем метод моментов. Методы определения числа Пекле по коэффициентам асимметрии и эксцесса имеют ошибки порядка сотен процентов (не вошли в область, представленную на рис. 1) и в данных условиях непригодны. Из данных на рис.1 следует, что с увеличением порядка момента ошибка определения параметра возрастает.

Расчеты показали, что для других значений точности эксперимента характер зависимостей аналогичен рис. 1,2; при этом увеличение точности опытов, естественно, уменьшает ошибки всех методик. Увеличение точности до  $\sigma=0,01$  позволяет применить оценку с использованием второго момента в диапазоне  $Re \geq 5$ , однако при  $Re \leq 5$  этот метод по-прежнему дает невысокую точность.

Если методика эксперимента позволяет снять данные с большей ошибкой воспроизводимости ( $\sigma=0,05$  и более), то во всем диапазоне значений  $Re$  целесообразно применять только метод НМНК.

Среднеквадратичные отклонения оценок (рис.2) характеризуют их асимптотическую эффективность [10]. Как видно из данных на рис. 2, дисперсии оценок по методу НМНК в несколько раз меньше, чем по любому из вариантов метода моментов. Это подтверждает предположение об оп-

тимальности оценок НМНК и в данном нелинейном случае. При увеличении ошибки эксперимента  $\sigma$  дисперсии оценок, определенных по различным методам, сближаются.

Как показали дополнительные расчеты, алгоритм определения времени опыта  $\theta^*$  по данным о воспроизводимости дает значения  $\theta^*$ , близкие к оптимальным. А именно увеличение или уменьшение времени опыта относительно  $\theta^*$  ведет к ухудшению всех оценок. Знание воспроизводимости эксперимента  $\sigma$  позволяет также при использовании методики НМНК и статистики Фишера достаточно эффективно оценить адекватность модели.

## ВЫВОДЫ

1. Установлены области целесообразного применения метода моментов и НМНК для определения продольного перемешивания в аппаратах. Показано, что при малых числах Пекле необходимо применение НМНК. Метод моментов можно использовать при  $Re \geq 5$  и достаточной точности эксперимента.

2. Показано, что в нелинейной задаче идентификации диффузионной модели метод НМНК имеет наилучшую точность и дисперсию оценок.

3. Предложены алгоритмы имитационного моделирования для исследования задач определения структуры потоков в технологических аппаратах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Розен А.М., Костянян А.Е. // Теоретические основы химической технологии. – 2002, №4, т. 36. С.339...346.
2. Сажин Б.С., Тюрин М.П. Энергосберегающие процессы и аппараты текстильных и химических предприятий. – М., 2001.
3. Сажин Б.С., Гудим Л.И. Вихревые пылеуловители. – М.: Химия, 1995.
4. Кафаров В.В., Дорохов И.Н. Системный анализ процессов химической технологии. – М.: Наука, 1976.
5. Гельперин Н.И., Пибалк В.А., Костянян А.Е. Структура потоков и эффективность колонных аппаратов химической промышленности. – М.: Химия, 1977.

6. *Кафаров В.В.* Методы кибернетики в химии и химической технологии. – М.: Химия, 1985.

7. Общий курс процессов и аппаратов химической технологии: Кн.1/Под общ. ред. Айнштейна В.Г. – М.: Химия, 1999.

8. *Зазулина З.А., Дружинина Т.В., Конкин А.А.* Основы технологии химических волокон. – М.: Химия, 1985.

9. *Белоусов А.С., Кочетов Л.М., Сажин Б.С. и др.* Гидродинамическая структура потоков в вихревой сушильной камере. – В кн.: Успехи в химии и

химической технологии. – М., 2003, №13(38), т.17. С. 94...97.

10. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Теория вероятностей и прикладная статистика. – М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2001.

Рекомендована кафедрой процессов и аппаратов химической технологии и безопасности жизнедеятельности. Поступила 04.02.05.

---