УДК (677.024.1:677.017.35).681.3

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ АЛЬТЕРНАТИВ ПО ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА УКЛАДКИ ЛЕКАЛ НА РУЛОННЫЙ МАТЕРИАЛ*

В.В. КЛЕЙНОСОВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)

В период рыночной экономики проблема безотходности производства или производства при минимуме отходов (которая раньше не рассматривалась) возникает, например, при переработке сырья одной геометрической формы в другую для материалов, не обладающих свойствами сыпучести, текучести, вязкости, то есть сохраняющими свою форму при незначительных воздействиях. К таким материалам можно отнести материалы текстильной и легкой промышленности (полотно, рулоны ткани, искусственная кожа), материалы других производств.

Геометрический образ исходного сырья естественно представить в виде рулона ширины H достаточно большой длины, а образ вторичного сырья – лекал – частей плоскости, ограниченных замкнутыми кривыми с диаметрами ≤ H. возможно, без выколотых лекал меньшего размера, образующих многосвязную область.

Производителям в первую очередь может быть интересен расчет оптимального количества исходного сырья с параметром H>0 для выполнения плана по лекалам:

$$B = (b_1, b_2, \dots b_m),\ \|B\| = \sum_{i=1}^{m} b_i ,$$

целые $b_i>0$ – количества лекал i-го вида (i = 1,2 … m). Лекала задаются своими размерами и формами .

Однако более существенными для производства могут оказаться вопросы, связанные с разработкой малозатратных технологий в целом комплексе операций, ориентируемых на малоотходное производство.

Малоотходность определим следующей постановкой задачи: из предложенного рулона шириной H выкроить план B, затратив минимум длины L_{min} рулона. Очевидно, величина L_{min} существует, однако найти ее проблематично при большой $\|B\|$.

Рассмотрим проблему с точки зрения исследования операций, то есть будем считать, что производится опыт по укладке на рулон лекал в случайно выбранной последовательности.

Чтобы избежать множества частных решений, полученных в результате использования свойств неоднородности материала рулона, будем считать материал рулона изотропным. Лекала, вырезанные

* Начало

в любых местах рулона, обладают одинаковыми свойствами. В такой ситуации каждый раз возникает вопрос, куда положить лекало и как его повернуть, то есть речь идет об алгоритме укладки.

Задачу такого типа обычно называют задачей "раскроя". Однако следует подчеркнуть, что задача "раскроя" – это задача технической реализации уже известного оптимального, в некотором смысле, плана, в то время как представленная задача – поиск такового.

Процесс композиции $\|B\|$ лекал в фигуры, помещающиеся в рулон, имеющейся ширины H, описать в общем случае не представляется возможным.

Нельзя применить и метод динамического программирования ввиду того, что для поставленной задачи: 1) нельзя сформулировать аддитивного критерия; 2) мощность множества условно оптимальных управлений на каждом шаге представляет собой трехмерный континуум (параллельный перенос в плоскости и поворот); 3) пошаговое принятие решений зависимо.

К аддитивному критерию приводит минимизация площади, занимаемой лекалами. Однако это не облегчает поиска алгоритма.

Для решения задачи возможно использование модели линейного программирования, записанной в виде: найти вектор $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ с целыми положительными координатами, удовлетворяющий системе

$$AX = B, \qquad (1)$$

и такой, чтобы линейная функция $L = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ принимала бы минимальное значение L_{min}. Это – хорошо известная задача целочисленного программирования со знаком равенства в (1) вместо знаков ($\leq$) или ($\geq$).

В общих постановках задач линейного программирования (ЗЛП) не принято задавать вопрос, как получена матрица A. Она считается заданной. Решение же данной задачи всецело зависит от конструктивных особенностей матрицы A: в частности, от значений координат a_{ij} m-мерных векторов $A_j \leq B$ и их количества n ($i = 1,2,\dots m$), ($j = 1,2,\dots,n$).

Математическое требование к матрице A, позволяющее получить хотя бы одно решение системы (1), имеет вид $|A| \neq 0$. Это значит, что количество векторов A_j должно быть m и все они должны быть линейно независимыми.

Для решения оптимизационной задачи необходимо условие $n > m$. Оно означает, что для решения задачи необходимо иметь n m-мерных векторов A_j, из которых можно было бы составить не менее двух квадратных матриц A размерности $[m\times m]$, обладающих свойствами $|A| \neq 0$. Чем больше таких матриц можно составить, тем более глубокий минимум остатков можно получить. Очевидно, что на матрице A будет достигнут глубокий минимум, если она состоит из векторов A_j, имеющих низкие оценки:

$$c_j = \frac{L_j}{\|A_j\|} \quad (j=1,2,\dots n) \qquad (2)$$

линейной функции $L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$; здесь L_j – длина куска рулона шириной H, необходимая для реализации подплана A_j. Коэффициент c_j можно рассматривать как удельную длину – среднюю длину рулона, приходящуюся на одно лекало вектора A_j.

В качестве c_j можно принять просто величину L_j, ($L_j \geq L_{jmin}$), которую можно непосредственно замерить, либо посчитать по формуле

$$L_j = \frac{S_j}{Э_j H}, \qquad (3)$$

где H – ширина рулона; $Э_j$ – эффективность укладки лекал вектора A_j на охватывающий эти лекала прямоугольник с площадью HL_j. Она равна отношению суммы площадей S_j не пересекающихся лекал вектора A_j к площади прямоугольника.

Если $c_j = L_j$, то скалярное произведение (CX) ($c_j > 0$) векторов $C = (c_1, c_2, \ldots c_n)$ и $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $(n - m)$ координат последнего из которых равны нулю, определяет необходимую для выполнения плана длину рулона L ширины H. Отсюда видно, что экономия расходов на материал рулона полностью определяется качеством укладки лекал каждого из векторов A_j ($j = 1, 2, \ldots n$) и зависит от количества n рассматриваемых линейно независимых векторов A_j. Следует заметить, что если даже получать для каждого A_j наилучшую оценку L_{min}, то

$$\sum_{j=1}^{n} L_{j\,min} \geq L_{min}(B).$$

Таким образом, использование модели линейного программирования для решения поставленной задачи привело бы к решению n точно таких же задач укладки лекал на рулонный материал с той лишь разницей, что вначале должен быть составлен алгоритм получения достаточно большого количества линейно независимых векторов A_j, линейная комбинация которых представляла бы вектор-план B. Оправданием такой процедуры может служить утешительное неравенство $\|A_j\| < \|B\|$.

Использование достижений фундаментальной математики при комплектовании векторов A_j не представляется возможным по ряду причин.

Если рассматривать вектор A_j как целевую композицию лекал при наличии ограничений, то описание такой композиции в общем виде не представляется возможным.

Если рассматривать вектор A_j как результат укладки выбранного множества лекал на рулон шириной H, то описание L_{jmin} в общем виде также затруднительно. В [1] можно встретить оценки укладок однопараметрических фигур: квадратов, кругов в двумерном случае, кубов, шаров – в трехмерном.

Если считать целевую укладку лекал произвольной геометрической формы на достаточно пространную фигуру другой геометрической формы геометрической оптимизацией, то можно сказать, что геометрическая оптимизация находится в зачаточной форме.

В [2], например, в аналитическом виде найдены $L_{min}(H)$ только для одного из лекал, описываемого двумя параметрами – прямоугольника, эллипса.

В связи со сказанным единственной пока возможностью найти L_{jmin} для вектора A_j является многократная физическая реализация этого вектора, сравнение L_j всех этих реализаций и выбора L_{jmin} – минимального из них. При такой процедуре величина L_{jmin} может быть определена лишь приближенно. Заметим, что в [2] предложена блок-схема алгоритма, позволяющая оценить композицию, полученную опытным путем.

Действительно, любая композиция – это кусочно-гладкая многосвязная область, внешний контур которой может быть задан с достаточно хорошей степенью точности набором координат (x_i, y_i) точек плоскости. Используя описанный в [2] алгоритм, можно найти параметры a и b прямоугольника наименьшей площади, заключающего в себя эту многосвязную область, а вместе с ними методом сечений и величину Э – эффективность укладки ($0 \leq Э \leq 1$).

К сожалению, метод укладки лекал в произвольные композиции не может быть использован для решения поставленной задачи, так как характеристики a и b никак не связаны с величиной H. Однако, когда в качестве сырья вместо рулона выступает множество кусков материала произвольной формы, уже покрытых различными множествами заданных лекал, и для каждого куска материала уже посчитана эффективность $Э_j$ его покрытия лекалами, то может быть поставлена задача целочисленного программирования выбора наилучших укладок из имеющихся, линейная комбинация лекал которых образовала бы план B.

Линейная функция $L=\sum_{j=1}^{n}Э_j$ здесь должна максимизироваться.

Анализируя сказанное, можно сделать вывод: внеплановое формирование вектора A_j – неэффективная трата времени, а вместе с тем и средств, поэтому рассматриваемая задача – это, прежде всего, задача "планирования эксперимента" по получению таких необходимых векторов A_j, которые, учитывая современные требования, обладали бы свойствами:

а) коэффициенты α_j в комбинации

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j = B$$ должны быть целыми

(отбрасывание дробных частей чисел α_j для дорогих материалов недопустимо);

в) в целях экономии времени количество векторов A_j должно быть сведено к минимуму;

с) каждый вектор A_j должен характеризоваться двумя противоборствующими параметрами: 1) временем его получения; 2) оптимальным результатом L_{jmin} укладки его лекал на рулон. Время t_j получения оценки L_{jmin} вектора A_j растет с ростом величины $\|A_j\|$.

Будем считать, что для самого большого вектора $A_j = B$ время t получения минимального значения L_{min} существует, но найти его практически невозможно. Это связано с тем, что для больших значений $\|B\|$ не представляется возможным аналитически показать, что даже достаточно хорошая раскладка лекал является наилучшей (оптимальной).

Согласно вышеизложенному решение поставленной проблемы видится в разработке перечня различных разложений вектора B на составляющие с одинаковым или примерно одинаковым “весом” и выбора из этих разложений наименее затратного, учитывая ценность материала.

При разбиении плана B на части предполагалось, что;

1) величина $L_{min}(B)$ оценивается аддитивной величиной

$$\overline{L}_{min}(B)=\sum_{j=1}^{n} L_{min}(A_j),$$

$$(L_{min}(B)\le\overline{L}_{min}(B));$$

2) с уменьшением $\|A_j\|$ время t_j поиска $L_{min}(A_j)$ не увеличивается;

3) характеристика линейной плотности $L_{min}(A_j)/\|A_j\|$ не уменьшается.

Существует достаточно много разложений вектора B на составляющие A_j такие, что $B=\sum_{j=1}^{n}A_j$ (коэффициенты A_j неотрицательны), каждый вектор A_j которого характеризовался бы двумя противоборствующими параметрами $(L_{min}(A_j),t_j)$, могущими быть замеренными для любого $j=(1,2,...,n)$. Очевидно, чем меньше таких составляющих, тем меньше суммарного времени Σt_j уйдет на измерение $\sum L_{min}(A_j)$.

Самым простым разложением вектора B на составляющие будет разложение $B=b_1e_1 + b_2e_2 + \dots b_me_m = \sum b_je_j$ (здесь e_j – единичный вектор m-мерного пространства). В этом случае время t_j отыскания величины $L_{min}(A_j)$ для каждого единичного вектора можно считать примерно одинаковым ($\sum t_j \approx mt_j$). Для дорогих материалов оценка $\overline{L}_{min}(B) = \sum L_{min}(e_j)$ для величины $L_{min}(B)$ вряд ли окажется удовлетворительной.

Отыскание величины $L_{min}(B)$ на конечной группе (относительно сложения) с базовыми единичными векторами малоперспективно, так как не содержит конкретного плана измерений величин $(L_{min}(A_j), t_j)$ и выхода их на план B[3].

Время поиска $t_в$ величины $L_{min}(B)$ зависит от многих причин, описать которые аналитически не представляется возможным. Если диаметры лекал меньше заданного H, то задача имеет решение: $t_в$ зависит от конфигурации лекал, их размеров и количества лекал $\|B\|$ в плане B.

Если диаметры различных видов лекал достаточно малы, то зависимость $t_в$ от $\|B\|$ близка к линейной. Повороты каждого лекала и последовательность их укладки на материал не оказывают существенного влияния на поиск величины $L_{min}(B)$.

С увеличением диаметров всех видов лекал роль поворотов лекал и последовательность их укладки на материал существенно возрастает.

Наиболее трудным является представление $t_в$, когда диаметры лекал распределены по различным законам.

ВЫВОДЫ

1. Интересующая текстильную и легкую промышленность задача определения величины L_{min} – минимальной длины рулона произвольной ширины H при укладке на него лекал, определенных своими контурами с диаметрами $d \le H$ в количестве, задаваемом вектором $B=(в_1, в_2, \ldots в_m)$ (m видов лекал), отличается по существу от хорошо известной в линейном программировании "задачи раскроя". В задаче раскроя векторы линейной модели A_j $(j=1,2,\ldots n)$ считаются заданными, в то время как в рассматриваемой задаче таких векторов нет.

2. Решение $L_{min}(H,B)$ в виде числа всегда существует, но не существует алгоритма получения этого числа. Нет математического аппарата аналитического представления $L_{min}(H,B)$.

3. В основу решения задачи положен экспериментально-асимптотический подход: так как время $t_в$ (поиска $L_{min}(B)) \rightarrow \infty$ при $\|B\| \rightarrow \infty$, величина $L_{min}(B)$ оценивается специально сконструированными суммами $\sum\limits_{\|A_j\|=const} L_{min}(A_j)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. – М.: Мир, 1973.

2. *Клейносов В.В.* Оптимизация укладки лекал на рулонном материале: Учебное пособие. – М.: МГАЛП, 1994.

3. *Мину М.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1990.

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 05.10.04.