

УДК 677.017.427:539.3

**ТЕОРИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРЯЖИ
ИЗ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ***В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.С. СКУЛАНОВА***(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина)**

Проектированию нитей и пряжи посвящено огромное количество работ. По мнению авторов, наиболее полное и корректное решение дано в статьях и книгах J.W.S. Hearle [1]. Периодическое появление зарубежных и отечественных работ самого последнего времени в этой области, к примеру [2], где даны ошибочные решения, противоречащие элементарным положениям механики деформированного твердого тела, еще больше запутывают этот непростой вопрос. Многочисленные регрессионные уравнения, полученные методами статистического планирования эксперимента, не заслуживают даже упоминания из-за невозможности их дальнейшего использования.

Наиболее известным и применяемым в расчетах прочности пряжи является метод А.Н. Соловьева [3]. Но все же и его конечная формула, и основные положения этого метода базируются на эмпирических связях, определяющих прочность пряжи по известным характеристикам волокон.

Аналитическое описание процессов деформирования и разрушения шерстяной пряжи дано в [4] и [5]. Разрабатываемый нами метод является универсальным, распространяющимся на любые волокна.

Дальнейшее развитие теории относится к расчетам прочности пряжи, образованной из нескольких компонентов. При этом геометрические и прочностные свойства волокон компонентов существенно различны. Любые планы прядения обеспечивают эффективное смешивание как на стадии приготовления смеси волокон, так и в процессах прядильного производства. В

связи с этим будем считать, что волокна в пряже распределены равномерно.

Геометрическая модель нити предполагает, что волокна располагаются по винтовым линиям с постоянным шагом. Тогда шаг винтовой линии h не зависит от текущего радиуса нити r , а угол ориентации отдельного волокна ϑ , равный углу подъема винтовой линии, изменяется вдоль радиуса, достигая на поверхности нити радиуса R величины β . Прочность пряжи определяется прочностью всех волокон, поэтому для расчетов необходимы усредненные характеристики. Методика усреднения тех или иных величин изложена ниже.

Общий план решения задач, связанных с нахождением перемещений и натяжений волокон отдельных компонентов при нагружении пряжи силой P , состоит в следующем. 1. Составить уравнения совместности деформаций, то есть соотношения, связывающие деформации отдельных элементов. 2. Заменить в уравнениях совместности величины деформаций через напряжения или усилия по закону Гука (или иному закону связи). 3. Составить уравнения статики, считая геометрию системы определенной для недеформированного состояния. 4. Решить полученную систему уравнений. Именно эта классическая схема, принятая в механике, не выполняется ни в одной из отечественных работ.

Обозначим деформацию пряжи ϵ_0 . Угол подъема оси волокна, то есть угол между касательной к винтовой линии и образующей цилиндрической поверхности пряжи, равен ϑ . Тогда деформация осевой линии единичного волокна запишется в виде [1],

[5]: $\varepsilon_B = \varepsilon_0 \cos^2 \vartheta$. В произвольном цилиндрическом слое, удаленном на расстоянии r от оси пряжи, волокна всех компонентов имеют одинаковую деформацию, вычисляемую по последней написанной формуле.

Проводя усреднение $\langle \cos^2 \vartheta \rangle$ по сечению пряжи, получим деформацию отдельного компонента. Проводить эту операцию сейчас нет необходимости. Основное, что отсюда следует, так это равенство деформаций каждого компонента при деформировании пряжи. Выразим деформации через силы. Для конкретности изложения примем четырехкомпонентную смесь для выработки на Купавинской тонкосуконной фабрике аппаратной пряжи линейной плотности 124,5 текс. Имеем

$$\frac{T_1}{E_1 F_1} = \frac{T_2}{E_2 F_2} = \frac{T_3}{E_3 F_3} = \frac{T_4}{E_4 F_4}. \quad (1)$$

Здесь $E_i F_i$ с соответствующими индексами представляет собой жесткость компонента при растяжении; T – натяжение волокон компонента. Наибольшие усилия возникают в наиболее жестком компоненте. Приведем величины жесткостей компонентов. На испытательной машине FM-27 при базовой длине $\ell_0 = 10$ мм в режиме постоянной скорости деформации проведены с необходимой точностью и надежностью испытания на прочность одиночных волокон. Жесткость одного волокна при известных из опыта разрывной на-

грузке P_B и деформации $\varepsilon_B = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$ вычисляется по формуле $(E_i F_i) = \frac{P_B}{\varepsilon_B}$.

В нашем случае получаем:

компонент 1, шерсть мериносовая 64/70 качества I – II длины –

$$(E_1 F_1)_1 = \frac{6,29}{0,264} = 23,83 \text{ сН};$$

компонент 2, шерсть мериносовая 64 качества II длины –

$$(E_2 F_2)_1 = \frac{6,53}{0,206} = 31,70 \text{ сН};$$

компонент 3, шерсть козья ангорская импортная L7900 –

$$(E_3 F_3)_1 = \frac{24,39}{0,187} = 130,43 \text{ сН};$$

компонент 4, капроновое волокно –

$$(E_4 F_4)_1 = \frac{14,30}{0,275} = 52,00 \text{ сН}.$$

Жесткость компонента равна жесткости одного волокна на число m_i волокон этого компонента. Доля i -го компонента смеси задается обычно по массе и обозначается через β_i .

В нашем случае

$$\beta_1 = 0,257; \beta_2 = 0,220; \beta_3 = 0,380; \\ \beta_4 = 0,143.$$

Средняя линейная плотность волокон в смеси определяется соотношением

$$T = \frac{1}{\sum_1^n \frac{\beta_i}{T_i}} = \frac{1}{\frac{0,257}{0,501} + \frac{0,220}{0,560} + \frac{0,380}{1,500} + \frac{0,143}{0,400}} = 0,659 \text{ текс}.$$

Прочность нити отождествляется с прочностью цепи, которая определяется прочностью ее наислабейшего звена. Таким звеном в пряже будет сечение с наименьшим числом волокон. Интересующая нас линейная плотность пряжи является суммой большого числа не зависимых между собой слагаемых, каждое из которых имеет незначительные размеры по сравне-

нию со всей суммой.

В таком случае можем ожидать, что распределение данной величины мало отклоняется от нормальной формы и с вероятностью 0,997 можем определить минимальную линейную плотность пряжи:

$$T_{\min} = \bar{T}_{\text{пряжи}} - 3\sigma.$$

Здесь σ – среднее квадратическое отклонение, связанное с коэффициентом вариации S соотношением $S = \sigma \bar{T}_{\text{пряжи}}$. Так как прочность пряжи определяется при зажимной длине 500 мм, то из спектра квадратической неровноты пряжи по линейной плотности, полученного на приборе КЛА-2, выбираем значение, соответствующее полуметровым отрезкам: $S=7,8\%$. Вычисляем $T_{\min} = 95,37$ текс.

Число волокон в этом сечении пряжи равно

$$m = \frac{T_{\min}}{T} = \frac{95,37}{0,66} = 144.$$

В соответствии с долевым участием получим число волокон каждого компонента. Но здесь надо иметь в виду, что от долей β_i компонентов по массе надо перейти к долям α_i по числу волокон, которые между собой связаны равенством

$$\alpha_i = \frac{\beta_i}{\sum_1^n \frac{\beta_i}{\bar{\ell}_i T_i}}$$

локна i -го компонента. Получим $\alpha_1 = 0,338$; $\alpha_2 = 0,257$; $\alpha_3 = 0,123$, $\alpha_4 = 0,282$.

Число волокон компонентов: $m_1 = 49$; $m_2 = 37$; $m_3 = 17$; $m_4 = 41$ и соответственно их жесткости $(E_i F_i) m_i$: $E_1 F_1 = 1167,7$ сН; $E_2 F_2 = 1172,9$ сН; $E_3 F_3 = 2217,3$ сН; $E_4 F_4 = 2132,0$ сН.

Уже было указано, что наибольшие усилия возникают в наиболее жестком компоненте. Обозначив соотношение жесткостей $e_i = \frac{E_i F_i}{E_3 F_3}$, получим отношения

жесткости каждого компонента к наиболее жесткому: $e_1 = 0,527$; $e_2 = 0,529$; $e_4 = 0,961$.

Если обозначить суммарное натяжение каждого из компонентов через T_i , то равновесие системы описывается уравнением

$$(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \langle \cos \vartheta \rangle = P. \quad (2)$$

Здесь $\langle \cos \vartheta \rangle$ представляет собой среднее значение $\cos \vartheta$. Усреднение вызвано тем, что натяжение компонента получено в

результате суммирования натяжения отдельных волокон, ориентированных под углом ϑ относительно оси нити. Как уже отмечалось, этот угол изменяется вдоль радиуса от нуля в центре до величины β на поверхности нити радиуса R . Жесткость нити определяется жесткостью всех волокон, поэтому для расчета прочности нити необходимы усредненные характеристики.

С учетом предыдущих равенств прочность пряжи задается формулой

$$P_* = T_{3*} (e_1 + e_2 + e_3 + 1) \langle \cos \vartheta \rangle.$$

Здесь звездочкой обозначены предельные величины, соответствующие разрушению. После того как достигается предельная нагрузка наиболее жесткого компонента T_{3*} , возможны различные варианты развития процесса.

Нагрузка P_* после разрыва наиболее жесткого компонента перераспределяется между оставшимися волокнами, и если они не способны воспринимать эту нагрузку, то вся нить разрушается. Если же более деформируемые компоненты еще могут нести нагрузку вместе с заблокированными силами трения разорванными участками жесткого компонента, то прочность пряжи увеличивается. Распределение усилий между разорванным компонентом и соседними, еще не разорванными, осуществляется в результате сил трения, и на некотором расстоянии от места обрыва практически не будет сказываться на распределении усилий.

Найдем среднее значение $\cos \vartheta$ [1], [5]. Разделим нить на цилиндрические элементы радиальной толщины dr и площадью $2\pi r dr$ с углом винтовой линии ϑ . Тогда среднее значение $\cos \vartheta$ получим в результате интегрирования:

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r \cos \vartheta dr.$$

Интеграл можно упростить, введя вместо r новую переменную ϑ , положив

$$r = h \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2\pi}.$$

Имеем $dr = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$. Кроме того, примем во внимание соотношения: $2\pi R = h \operatorname{tg} \beta$, $2\pi r = h \operatorname{tg} \vartheta$.

После преобразования подынтегрального выражения к новой переменной и замены пределов получим

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \frac{2 \cos \beta (1 - \cos \beta)}{\sin^2 \beta}.$$

Угол кручения β исследуемой пряжи линейной плотности 124,5 текс с круткой 287 кр/м равен $26,8^\circ$ (при плотности пряжи $0,5 \text{ г/см}^3$). Тогда усредненное $\langle \cos \vartheta \rangle$ принимает значение $\langle \cos \vartheta \rangle = 0,95$.

Следующим этапом проектирования является расчет прочности T_{3*} наиболее жесткого, третьего компонента, который разрушается первым. Здесь следуем методике, разработанной в [4], [5]. Механизм разрушения нити, представляющий собой последовательный разрыв волокон, сначала наиболее слабых, а затем, после обрыва одного волокна, перераспределение нагрузки на остальные $m_3 - 1$ волокон и т. д., учитывается коэффициентом реализации средней прочности волокон:

$$k = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}, \quad (3)$$

где α – параметр распределения Вейбулла прочности волокон; $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Параметры α и P_* распределения Вейбулла находятся из системы уравнений, выражающих среднюю прочность волокон \bar{P}_B и дисперсию их прочности D :

$$\bar{P}_B = P_* \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \text{ и}$$

$$D = P_*^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right].$$

Для волокон третьего компонента – ангорской шерсти: $\bar{P}_B = 26,703 \text{ сН}$, $D = 36,79 \text{ сН}^2$, и решение дает $P_* = 26,703$; $D = 4,569$.

Тогда вычисленный по формуле (3) коэффициент реализации средней прочности волокон в пряже принимает значение $k = 0,631$. Моделирование волокна в виде звеньев цепи согласуется с представлениями о том, что разрушение обусловлено локальными дефектами. Справедливость такой модели подтверждается зависимостью прочности волокон от их длины. Это подтверждается экспериментальными данными о прочности волокон, которую можно считать убывающей функцией длины волокон.

Формула, определяющая среднюю прочность волокон длиной ℓ , получена [5] в виде

$$\bar{P}_B(\ell) = P_* \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right). \quad (4)$$

Модель нити с винтовым расположением волокон не вполне отражает реальную структуру пряжи. Отклонения возникают из самой технологии нити, когда нить при отсутствии крутки, состоящая из параллельных волокон, преобразуется в крученную структуру, в которой наружные волокна длиннее центральных.

Геометрическая совместимость волокон при кручении достигается в основном сменой положения частей волокон относительно оси нити таким образом, чтобы на большом протяжении нити длины траекторий волокон были бы одинаковыми. Этот эффект называют миграцией волокон.

В пряже, образованной волокнами конечной длины, возникает скольжение волокон, начинающееся от концов волокон. Концы волокон не закреплены, и их натяжение должно равняться нулю. Распределение усилий между волокнами осуществляется в результате сил трения взаимодействующих волокон.

На некотором расстоянии ℓ_c от конца волокна натяжение возрастает до уровня, при котором проскальзывания нет. Длина участка скольжения определяется соотношением [1]:

$$\ell_c = \sqrt{\frac{d_b Q}{2\mu(1 - \cos^2 \beta)}},$$

где d_b – диаметр волокна; Q – длина волны миграции, составляющая четыре оборота крутки [1]; μ – коэффициент трения между волокнами. Принимая $\mu = 0,2$, получаем длину скольжения $\ell_c = 2,537$ мм.

Особо следует отметить полное совпадение расчетной величины длины скольжения с экспериментальной, полученной А.Н. Соловьевым при проектировании хлопчатобумажной пряжи [3]. Это является одним из подтверждений универсальности метода. Длина волокна, воспринимающая и передающая нагрузку, становится равной $\ell = \bar{\ell}_b - 2\ell_c = 53,326$ мм, а прочность волокна, пересчитанная на эту длину по формуле (4), принимает значение 16,9 сН.

Проскальзывание волокон уменьшает прочность пряжи и характеризуется коэффициентом скольжения [4], [5]:

$$k_c = 1 - \frac{2}{3\bar{\ell}_b} \sqrt{\frac{d_b Q}{2\mu(1 - \cos^2 \beta)}} = 0,971.$$

Окончательно вычислим прочность многокомпонентной пряжи:

$$P_* = \bar{P}_b(\ell) m_3 (e_1 + e_2 + e_3 + 1) k k_c \langle \cos \vartheta \rangle = \\ = 16,9 \cdot 17 \cdot 3,017 \cdot 0,631 \cdot 0,971 \cdot 0,95 = 504,5 \text{ сН}.$$

Реальная прочность исследуемой пряжи равна 475,5 сН; относительная ошибка прочности, предсказанная теорией, составила 5,7%. Таким образом, разработанная теория, учитывающая структурные особенности пряжи, геометрические, жесткостные, фрикционные и другие характеристики волокон, дает удовлетворительное описание разрушения пряжи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hearle J. W. S., Grosberg P., Backer S.* Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics, New York, 1969.
2. *Бархоткин Ю.К.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, № 6. С.27...30.
3. *Кукин Г.Н., Соловьев А.Н.* Текстильное материаловедение. – Ч. 2. – М.: Легкая индустрия. 1964.
4. *Щербаков В.П., Скуланова Н.С., Полякова Л.В.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1999, №№ 3, 4.
5. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: РИО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 30.12.04.