УДК 687.021.531.36

К ТЕОРИИ УПРУГИХ ТЕКСТИЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК, НЕ ПОЛНОСТЬЮ ПРИЛЕГАЮЩИХ К ОХВАТЫВАЕМЫМ ИМИ ТЕЛАМ * **

Е. В. ПОЛЯКОВА, В. Я. ЭНТИН, В. А. ЧАЙКИН

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

В [1] получено выражение функционала, определяющего потенциальную энергию оболочки в зависимости от ее, предполагаемых заданными, формы и деформаций. В настоящей части работы получены уравнения для определения формы и деформаций оболочки, охватывающей тело вращения и удерживающейся в равновесии за счет частичного прилегания к нему. Излагается общая методика приближенного решения указанных уравнений.

3. Уравнения и граничные условия для определения формы и деформаций оболочки. Пусть оболочка натянута на поверхность тела, образованную вращением вокруг оси z кривой $\rho = \rho(z)$. Будем предполагать, что эта поверхность сужается при возрастании z от значения $z = h_1$ до некоторого значения $z = h < h_2$, а затем расширяется при дальнейшем увеличении z до значения $z = h_2$.

Изучим условия, при которых оболочка прилегает к телу в его расширенных частях, то есть при $h_1 \le z < z_1$ и $z_2 < z \le h_2$, и теряет контакт с телом при $z_1 \le z \le z_2$. Здесь z_1 и z_2 – подлежащие отысканию величины, определяющие границы области контакта.

Потенциальная энергия деформации оболочки, согласно результатам работы [1], может быть представлена в виде

$$U[R,\varsigma] = \pi\int_{h_1}^{z_1}\left(k_1\left(\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-1}\sqrt{\rho'^2(z)+1}/\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma(z))}{d\varsigma}\right)^2+1}-1\right)^2+\right.$$

$$\left.+k_2\left(\frac{\rho(z)}{R_0(\varsigma(z))}-1\right)^2\right)\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma(z))}{d\varsigma}\right)^2+1}\frac{d\varsigma(z)}{dz}R_0(\varsigma(z))dz+$$

$$+\pi\int_{z_1}^{z_2}\left(k_1\left(\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-1}\sqrt{R'^2(z)+1}/\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma(z))}{d\varsigma}\right)^2+1}-1\right)^2+\right.$$

$$\left.+k_2\left(\frac{R(z)}{R_0(\varsigma(z))}-1\right)^2\right)\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma(z))}{d\varsigma}\right)^2+1}\frac{d\varsigma(z)}{dz}R_0(\varsigma(z))dz+$$

---

* Продолжение. Начало см. в №3 за 2005 г.

** В порядке обсуждения.

$$+\pi\int_{z_2}^{h_2}\left(k_1\left(\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-1}\sqrt{\rho'^2(z)+1}/\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma(z))}{d\varsigma}\right)^2+1}-1\right)^2+\right.$$

$$\left.+k_2\left(\frac{\rho(z)}{R_0(\varsigma(z))}-1\right)^2\right)\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma(z))}{d\varsigma}\right)^2+1}\frac{d\varsigma(z)}{dz}R_0(\varsigma(z))dz. \qquad (1)$$

Вариационный метод изучения состояния оболочки сводится к тому, чтобы определить те функции $R(z)$ и $\varsigma(z)$, которые являются экстремалями функционала (1). Пользуясь обычной техникой вариационного исчисления, получаем [2] дифференциальные уравнения для определения указанных экстремалей. Приведем эти уравнения применительно к тому случаю, когда оболочка в "недеформированном" состоянии представляет собой цилиндрическую трубу радиусом R_0 и длиной L.

Первое из этих уравнений имеет вид:

$$\frac{d}{dz}\left(k_1\left((1+\rho'^2(z))\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-2}-1\right)-k_2\left(\frac{\rho(z)}{R_0}-1\right)^2\right)=0 \qquad (2)$$

и служит для отыскания функции $\varsigma(z)$ на промежутках $h_1 \le z < z_1$ и $z_2 < z \le h_2$.

Другие уравнения образуют систему

$$\frac{d}{dz}\left(k_1\left((1+R'^2(z))\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-2}-1\right)-k_2\left(\frac{R(z)}{R_0}-1\right)^2\right)=0, \qquad (3)$$

$$k_1\frac{d}{dz}\left(\left(\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-1}-\frac{1}{\sqrt{1+R'^2(z)}}\right)R'(z)\right)-k_2\left(\frac{R(z)}{R_0}-1\right)\frac{1}{R_0}\frac{d\varsigma(z)}{dz}=0, \qquad (4)$$

которая служит для отыскания функций $R(z)$ и $\varsigma(z)$ на промежутке $z_1 < z < z_2$.

Однозначное и соответствующее постановке задачи определение этих функций обеспечивается подчинением их следующим условиям:

$$\varsigma(h_1)=0, \varsigma(h_2)=L, \varsigma(z_1-0)=\varsigma(z_1+0), \varsigma(z_2-0)=\varsigma(z_2+0),$$
$$R(z_1)=\rho(z_1), R(z_2)=\rho(z_2), \qquad (5)$$

обеспечивающим удержание кромок оболочки в положениях, соответствующих заданным величинам h_1 и h_2, а также непрерывность формы и деформаций оболочки.

Условия

$$\frac{d\varsigma(z_1-0)}{dz}=\frac{d\varsigma(z_1+0)}{dz}, \frac{d\varsigma(z_2-0)}{dz}=\frac{d\varsigma(z_2+0)}{dz},$$
$$R'(z_1+0)=\rho'(z_1-0), \quad \rho'(z_2+0)=R'(z_2-0) \qquad (6)$$

обеспечивают гладкое "сопряжение" тех частей оболочки, которые прилегают к телу, с той ее частью, которая не имеет с ним контакта. Условия (5) и (6) служат и для вычисления величин z_1 и z_2, определяющих места отделения оболочки от тела.

4. Приближенное исследование оболочек методом малого параметра. Приведем алгоритм приближенного исследования задачи для тех случаев, когда радиусы поперечных сечений оболочки, а значит, и радиусы поперечных сечений частей тела, контактирующих с оболочкой, мало отличаются от радиуса R_0 "недеформированной" оболочки. Малость указанных отличий выразим допущением, что $R(z)$ и $\rho(z)$ могут быть представлены формулами

$$R(z) = R_0 + \mu r(z),\ \rho(z) = R_0 + \mu\delta(z), \quad (7)$$

где μ – малая безразмерная величина, а $r(z)$ и $\delta(z)$ – функции, определяющие отклонения форм оболочки и тела от цилиндрической формы.

Используя (7), перепишем уравнения (2)…(4) в виде:

$$\frac{d}{dz}\left(k_1\left((1+\mu^2\delta'^2(z))\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-2}-1\right)-\frac{k_2\mu^2\delta^2(z)}{R_0^2}\right)=0, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dz}\left(k_1\left((1+\mu^2 r'^2(z))\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-2}-1\right)-\frac{k_2\mu^2 r^2(z)}{R_0^2}\right)=0, \quad (9)$$

$$k_1\frac{d}{dz}\left(\left(\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-1}-\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2 r'^2(z)}}\right)r'(z)\right)-k_2\frac{r(z)}{R_0^2}\frac{d\varsigma(z)}{dz}=0. \quad (10)$$

Используем малый параметр μ для построения искомых решений уравнений (8)…(10) методом малого параметра (методом неопределенных коэффициентов). В соответствии с техникой этого метода будем искать функции $r(z)$ и $\zeta(z)$, а также величины z_1 и z_2 в виде рядов:

$$\begin{gathered} r(z) = r_0(z) + \mu r_1(z) + \mu^2 r_2(z) + \ldots,\ \varsigma(z) = \varsigma_0(z) + \mu\varsigma_1(z) + \mu^2\varsigma_2(z) + \ldots, \\ z_1 = z_{10} + \mu z_{11} + \mu^2 z_{12} + \ldots,\ z_2 = z_{20} + \mu z_{21} + \mu^2 z_{22} + \ldots, \end{gathered} \quad (11)$$

где $r_0(z)$, $r_1(z)$, $r_2(z)$,...; $\varsigma_0(z)$, $\varsigma_1(z)$, $\varsigma_2(z)$,...; z_{10}, z_{11}, z_{12},...; z_{20}, z_{21}, z_{22},..., – неопределенные "коэффициенты" рядов, подлежащие отысканию.

Уравнения для отыскания этих коэффициентов получаем, подставляя $r(z)$, $\varsigma(z)$, z_1 и z_2 из (11) в уравнения (8)…(10), разлагая левые части этих уравнений в ряды по степеням параметра μ и приравнивая нулю коэффициенты этих рядов. Таким образом, для отыскания нулевого приближения, то есть функций $r_0(z)$ и $\varsigma_0(z)$, получаем уравнения

$$\frac{d}{dz}\left(k_1\left(\left(\frac{d\varsigma_0(z)}{dz}\right)^{-2}-1\right)\right)=0, \tag{12}$$

$$k_1\frac{d}{dz}\left(\left(\left(\frac{d\varsigma_0(z)}{dz}\right)^{-1}-1\right)r_0'(z)\right)-k_2\frac{r_0(z)}{R_0^2}\frac{d\varsigma_0(z)}{dz}=0. \tag{13}$$

Отметим, что уравнения (8) и (9) в нулевом приближении совпали по форме, поэтому вместо них записано одно уравнение (12).

Для того, чтобы получить дополнительные условия, которым должны удовлетворять решения различных приближений, нужно подставить выражения $r(z)$, $\varsigma(z)$, z_1 и z_2 из (11) в равенства (5)…(6) и приравнять в левых и в правых частях получившихся при этом равенств коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ.

В результате для нулевого приближения получаем условия:

$$\varsigma_0(h_1)=0,\ \varsigma_0(h_2)=L,\quad \varsigma_0(z_{10}-0)=\varsigma_0(z_{10}+0),\quad \varsigma_0(z_{20}-0)=\varsigma_0(z_{20}+0), \tag{14}$$

$$r_0(z_{10})=\delta(z_{10}),\quad r_0(z_{20})=\delta(z_{20}), \tag{15}$$

$$\frac{d\varsigma_0(z_{10}-0)}{dz}=\frac{d\varsigma_0(z_{10}+0)}{dz},\quad \frac{d\varsigma_0(z_{20}-0)}{dz}=\frac{d\varsigma_0(z_{20}+0)}{dz},$$
$$r_0'(z_{10}+0)=\delta'(z_{10}-0),\quad \delta'(z_{20}+0)=r_0'(z_{20}-0). \tag{16}$$

ВЫВОДЫ

1. Получены дифференциальные уравнения, определяющие форму и деформации оболочки, охватывающей тело вращения.

2. Разработан алгоритм приближенного решения этих уравнений методом малого параметра. Построены уравнения нулевого приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полякова Е.В., Энтин В.Я., Чайкин В.А.* //Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2005, №3. С.107…110.

2. *Чайкин В.А., Полякова Е.В.* Основы механики мягких оболочек и тканей. – СПб.: СПГУТД, 2004.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 04.04.05.