

УДК 677.48.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЛОКОН В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУРАХ

И.П. КОРНЮХИН, Т.А. КОРНЮХИНА

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)

Объектом исследования является пространственная структура, получающаяся из состояния полного хаоса путем деформации волокнистого материала в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В таких условиях функция распределения

будет зависеть как от полярного, так и от азимутального углов.

Для получения пространственной функции распределения используется подход, экспериментально обоснованный в [1]. Этот подход основывается на исполь-

зовании уравнения, связывающего функции распределения в двух состояниях, причем так, что между аргументами этих функций существует строгая зависимость. Это уравнение, связывающее двумерные функции углового распределения в сферических координатах, выглядит так:

$$\ell(\phi, \alpha) = \ell_0(\psi(\phi, \alpha), \theta(\phi, \alpha)) |D|, \quad (1)$$

где $\ell_0(\psi, \theta)$ – плотность распределения в состоянии, рассматриваемом как начальное, исходное; $\ell(\phi, \alpha)$ – плотность распределения в конечном состоянии; $|D|$ – модуль якобиана:

$$D = \frac{D(\psi, \theta)}{D(\phi, \alpha)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} & \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \phi} & \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Плотность распределения $\ell_0(\psi, \theta)$ для полностью хаотического состояния может быть задана априорно. В сферической системе координат она имеет вид:

$$\ell_0(\psi, \theta) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta. \quad (3)$$

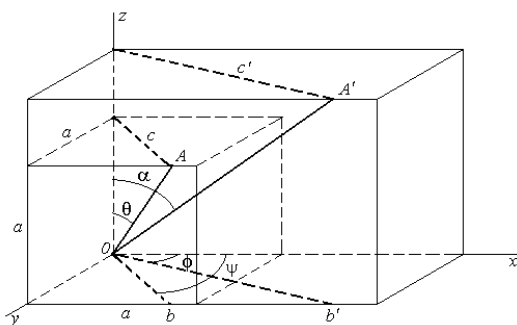


Рис. 1

Для нахождения функциональных зависимостей $\phi(\psi, \theta)$ и $\alpha(\psi, \theta)$ воспользуемся схемой, показанной на рис.1. На этой схеме куб со стороной a характеризует полностью хаотическое состояние волокнистого материала. Направление OA произвольного участка волокна образует с осью Ox угол ψ (азимутальный) и с осью Oz угол θ (полярный). Проекция рассматриваемого

участка волокна отсекает на стороне, параллельной Ox , отрезок b так, что

$$\text{ctg} \psi = b/a. \quad (4)$$

На верхнюю грань куба он проектируется в отрезок длиной c , так что

$$\text{tg} \theta = c/a. \quad (5)$$

Для изменения ориентации элемента волокна в пространстве достаточно произвести линейную деформацию куба только по двум координатным осям. На схеме рис.1 деформация растяжения произведена в направлении осей Ox и Oz , в результате чего куб превращается в прямоугольный параллелепипед. В итоге такого преобразования участок волокна приобретает направление OA' , образующее с осями Ox и Oz углы ϕ и α соответственно.

На стороне, параллельной Ox , этот участок отсекает отрезок длиной b' , а на верхнюю грань параллелепипеда проецируется в отрезок c' . Для деформированного образца аналогами уравнений (4) и (5) будут

$$\text{ctg} \phi = b'/a, \quad (6)$$

$$\text{tg} \alpha = c'/a', \quad (7)$$

где a' – длина вертикального ребра параллелепипеда, получившегося после деформации куба.

Анализируя схему рис. 1, нетрудно заметить, что

$$c = b/\cos \psi, \quad (8)$$

$$c' = b'/\cos \phi. \quad (9)$$

Вводя параметры λ_x и λ_z , характеризующие относительное изменение размеров по координатным осям, получим

$$b' = b\lambda_x, \quad (10)$$

$$a' = a\lambda_z. \quad (11)$$

Исключая из уравнений (4)...(11) все линейные размеры, получим функциональные зависимости, связывающие старые и новые переменные:

$$\operatorname{ctg} \phi = \lambda_x \operatorname{ctg} \psi, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_x \cos \psi}{\lambda_z \cos \phi} \operatorname{tg} \theta. \quad (13)$$

При помощи уравнений (12), (13) вычисляются компоненты якобиана:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\lambda_z}{\lambda_x} \frac{\sqrt{\lambda_x^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi}}{\cos^2 \alpha + \frac{\lambda_z^2}{\lambda_x^2} \sin^2 \alpha (\lambda_x^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi)}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \frac{\lambda_x}{\lambda_x^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi}. \quad (15)$$

Поскольку $\partial \psi / \partial \alpha = 0$, определитель якобиана (2) равен

$$|D| = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}. \quad (16)$$

Исключим переменную θ из формулы (3) при помощи уравнений (12), (13), после чего подставим полученный результат, а также значение якобиана (16) в формулу (1). В итоге этих преобразований найдем двумерную двухпараметрическую пространственную плотность углового распределения длин участков волокон в виде

$$\ell(\phi, \alpha) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda_z^2}{\lambda_x} \frac{\sin \alpha}{\left[\cos^2 \alpha + \frac{\lambda_z^2}{\lambda_x^2} \sin^2 \alpha (\lambda_x^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \right]^{3/2}}. \quad (17)$$

Плотность распределения $\ell(\phi, \alpha)$ нормирована на 1 на интервале изменения азимутального угла $0 \leq \phi \leq 2\pi$ и полярного угла $0 \leq \alpha \leq \pi$. В данном случае распределение описывает направления отрезков прямых, а не векторов. По этой причине направления, определяемые углами ϕ и

$\pi + \phi$, эквивалентны. Нетрудно заметить также, что $\ell(\pi - \phi, \alpha) = \ell(-\phi, \alpha)$. Это позволяет описать плотность распределения $\ell(\phi, \alpha)$ в интервале изменения азимутального угла $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ функцией

$$\ell(\phi, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_z^2}{\lambda_x} \frac{\sin \alpha}{\left[\cos^2 \alpha + \frac{\lambda_z^2}{\lambda_x^2} \sin^2 \alpha (\lambda_x^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \right]^{3/2}}. \quad (18)$$

Более наглядным представляется определение $\ell(\phi, \alpha)$ в интервале изменения по-

лярного угла $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$. При этом формула (18) запишется как

$$\ell(\phi, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_z^2}{\lambda_x} \frac{|\sin \alpha|}{\left[\cos^2 \alpha + \frac{\lambda_z^2}{\lambda_x^2} \sin^2 \alpha (\lambda_x^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \right]^{3/2}}. \quad (19)$$

Теоретически параметры распределения λ_x и λ_z могут принимать значения в интервале от 0 до ∞ . Значение любого из этих параметров, равное 1, характеризует отсутствие преимущественной ориентации в направлении соответствующей оси. При растяжении в направлении какой-либо из осей величина соответствующего параметра превышает 1, а при сжатии – меньше 1. Как и следовало ожидать, при значении $\lambda_x = 1$ функции $l(\phi, \alpha)$, определяемые фор-

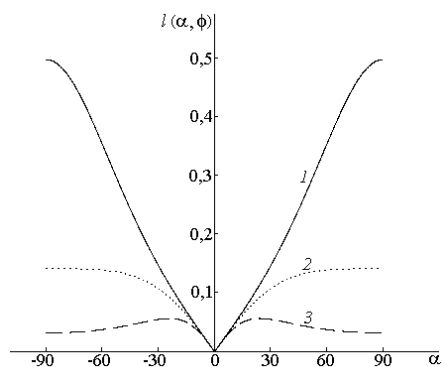


Рис. 2

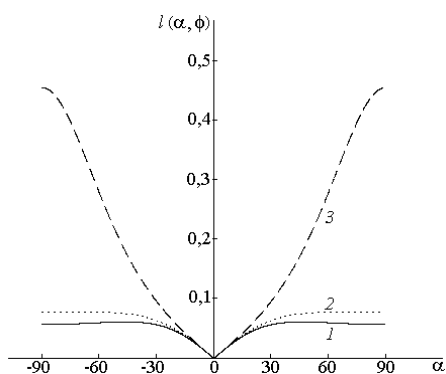


Рис. 4

На каждом из графиков рис. 2...4 представлены зависимости плотности распределения $l(\phi, \alpha)$ от величины полярного угла при трех значениях азимутального угла.

Графики на рис. 2 характеризуют плотность распределения в меридиональных плоскостях при значениях $\phi = 0, \pi/6, \pi/2$ соответственно кривым 1, 2 и 3, когда $\lambda_x = 2,5$, а $\lambda_z = 2$.

Графики на рис. 3 относятся к случаю $\lambda_x = 0,5$ и $\lambda_z = 2$, а кривые 1, 2 и 3 построены для значений $\phi = 0, \pi/4, \pi/2$.

мулами (17)...(19), переходят в соответствующие функции $l(\alpha)$ для осесимметричной структуры.

Интегрирование величины $l(\phi, \alpha)$ по всему интервалу изменения полярного угла дает полученное в [1] соответствующее выражение для плотности распределения применительно к плоской структуре. Эти переходы служат косвенным подтверждением корректности полученного распределения.

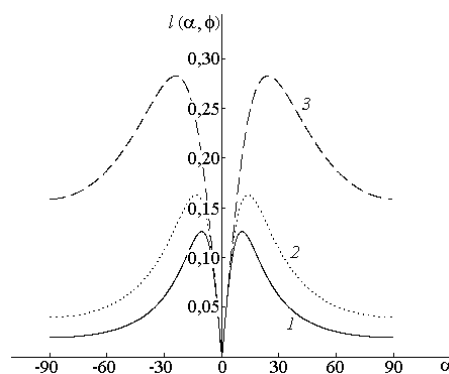


Рис. 3

Кривые на графике рис. 4 относятся к тем же меридиональным плоскостям, что и на рис. 3 и получены при значениях $\lambda_x = 0,5$ и $\lambda_z = 0,7$.

Графики распределения для величин $\lambda_x = 1$ приведены на рис. 1 в [2]. Определения осей и углов соответствуют схеме, показанной на рис. 1.

В меридиональной плоскости, совпадающей с плоскостью xOz ($\phi = 0$, кривые 1 на графиках), доля длин участков волокон в направлении оси Ox в случае растяжения материала увеличивается (рис.2), а в случае сжатия – уменьшается (рис. 3 и 4).

В меридиональной плоскости, совпадающей с плоскостью yOz ($\phi = \pi/2$, кривые 3 на графиках), при сжатии по оси Ox растет доля длин участков волокон в направлении Oy (рис. 3 и 4), а при растяжении, наоборот, уменьшается (рис.2).

В этой же плоскости заметна более высокая доля волокон в направлениях близких к оси Oz при растяжении по этой оси, что видно из сопоставления кривых 3 на графиках рис. 3 и 4. В меридиональных плоскостях, наклоненных под углами ϕ ,

равными $\pi/6$ или $\pi/4$ (кривые 2 на графиках), закономерности ориентации волокон промежуточные между рассмотренными ранее для случаев $\phi = 0, \pi/2$.

ВЫВОДЫ

Получена функция, описывающая плотность углового распределения по длине участков волокон для пространственной волокнистой структуры при двухосной деформации. В частных случаях функция позволяет находить плотность углового рас-

пределения для плоской и осесимметричной структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнюхин И.П., Корнюхина Т.А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2004, №3. С.14...18.

Рекомендована кафедрой промышленной теплоэнергетики. Поступила 28.11.05.

/