УДК 677.075.017.363

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ, РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ТРИКОТАЖНОЙ ПЕТЛИ

В.П. ЩЕРБАКОВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Интерес к проблеме, сформулированной в названии статьи, лежит как в области теории вязания, так и в сфере практического ее приложения. Изучение и визуализация структуры трикотажа переплетения кулирная гладь позволяет считать, что контакт рядом расположенных петель происходит в области линии EF (рис.1) [1]. Точкой K обозначена середина прямой линии, соединяющей точки E и F.

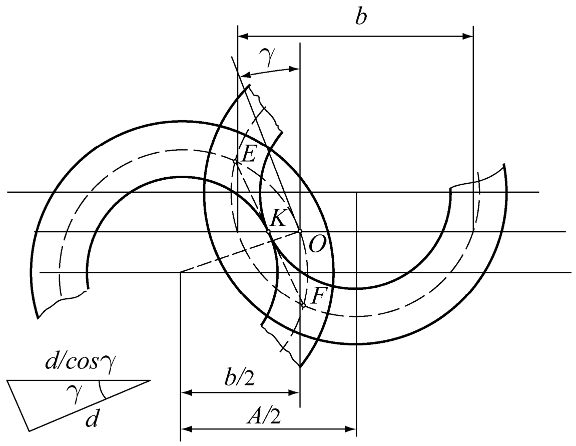

Рис. 1

Стремление деформированной при вязании упругой нити восстановить естественную форму приводит к возникновению усилий, действующих в области контакта смежных петель. Результирующей распределенных здесь сил является сила P, которая так же, как и сила трения между нитями контактирующих петель, есть результат взаимодействия двух соприкасающихся петель (рис.2).

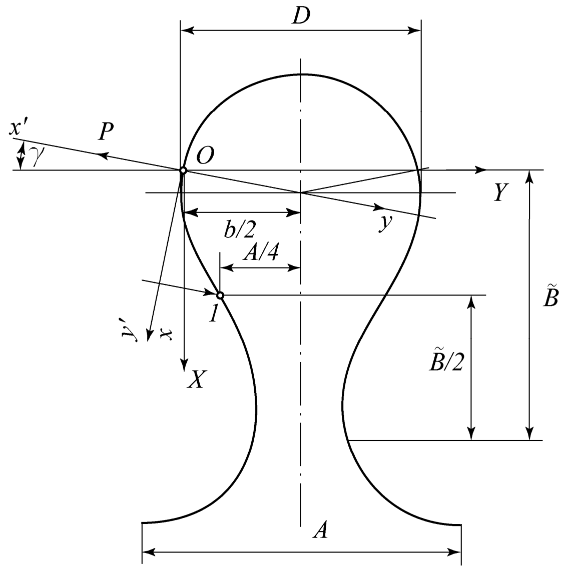

Рис. 2

Реальная область контакта расположена вне осевой линии упругой нити. Но именно для осевой линии написаны все уравнения равновесия, и на осевой линии размещена точка, обозначенная на рис. 2 как точка O, которая принадлежит линии действия силы P и которую условно назовем точкой контакта. Направление и величина силы P неизвестны.

Использование принятого в специальной литературе соотношения $\gamma = \operatorname{arc\,tg}\varphi$, где γ – угол между касательной в точке O и направлением петельных столбиков; φ – коэффициент трения нить о нить, не корректно. Во-первых, пути экспериментального определения k в нашем случае неясны. Дать точную оценку величины k невозможно. Приближенное же определение коэффициента трения делает бессмысленным то уточнение, которое дает предлагаемый здесь метод расчета по сравнению с распространенным в технологии трикотажа геометрическим подходом. Во-вторых, угол γ связан не с реальной нитью, а с воображаемой нематериальной осевой линией и не равен действительному углу трения.

Рассмотрим рис. 2. В силу симметрии петли длина нити в ней [1]:

$$L = 4\left[\ell + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)D\right]. \qquad (1)$$

Здесь ℓ – длина упругой линии O1: D – диаметр окружности, являющейся формой игольной и платинной дуг. Величины ℓ, γ, D неизвестны и подлежат определению.

Исследуем равновесие упругой линии O1 (рис.3).

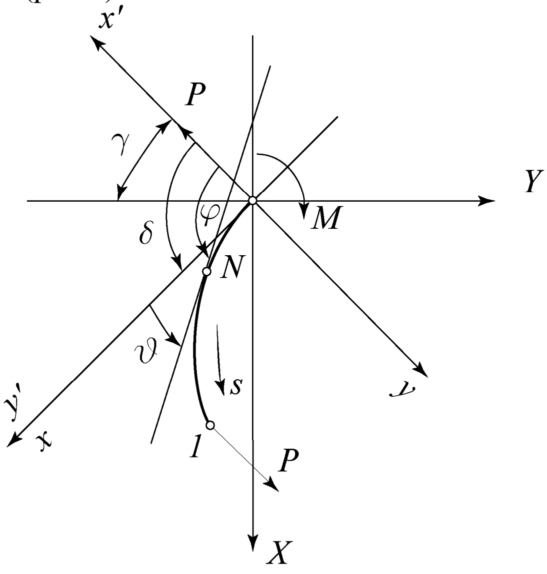

Рис. 3

В точке O введем три системы координат: 1. Систему $x'y'$, ориентированную по направлению силы, приложенной в начальной точке O. 2. Систему координат xy, ориентированную по касательной и нормали к упругой линии в начальной точке O. 3. Систему координат XY, ориентированную соответственно по направлениям петельных столбиков и петельных рядов.

Точное уравнение равновесия упругой линии в системе x'y' записывается в безразмерном виде [2]:

$$\ell^2 \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\omega^2 \sin^2 \varphi. \qquad (2)$$

Здесь $\omega = \sqrt{\dfrac{P\ell^2}{H}}$ – безразмерный силовой коэффициент подобия (H – жесткость нити при изгибе).

Обозначим через $F(\alpha)$эллиптический интеграл первого рода:

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}.$$

После интегрирования уравнения (2) получаем

$$\omega \frac{s}{\ell} = F(\alpha) - F(\alpha_0). \qquad (3)$$

Запишем форму упругой линии в координатах x'(s) и y'(s):

$$\frac{x'}{\ell} = \frac{2}{\omega}\left[E(\alpha) - E(\alpha_0)\right] - \frac{s}{\ell}, \quad \frac{y'}{\ell} = \frac{2}{\omega} k\left(\cos\alpha_0 - \cos\alpha\right). \qquad (4)$$

Здесь через $E(\alpha)$ обозначен эллиптический интеграл второго рода:

$$E(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2} d\alpha.$$

Перейдем к системе координат xy. Получим

$$\frac{x}{\ell} = \frac{x'}{\ell}\cos\delta + \frac{y'}{\ell}\sin\delta,$$
$$\frac{y}{\ell} = \frac{y'}{\ell}\cos\delta - \frac{x'}{\ell}\sin\delta. \qquad (5)$$

Рассмотрим граничные условия для рассматриваемой упругой нити. В концевой точке 1 упругой линии отсутствует изгибающий момент, поэтому кривизна $\frac{d\varphi}{ds}$ здесь равна нулю.

С учетом предыдущего положения о нулевой кривизне в точке 1 будем иметь

$$2k\cos\alpha_1 = 0. \qquad (6)$$

Кроме того, в данной схеме изгиба $\vartheta_0 = 0$ и $\delta = 90^\circ$.

Примем во внимание, что $\varphi = \vartheta + \delta$. Так как $\varphi = 2\arcsin\left(k\sin\alpha\right)$, то второе граничное условие дает

$$k\sin\alpha_0 = \sin 45^\circ. \qquad (7)$$

Для определения третьего эллиптического параметра имеем

$$F\left(\alpha_1\right) - F\left(\alpha_0\right) = \sqrt{\frac{P\ell^2}{H}}. \qquad (8)$$

Три уравнения (6)…(8) определяют три эллиптических параметра – модуль эллиптического интеграла k, его амплитуды α_0 и $\alpha_1 = 90^\circ$.

Связь переменной α с внутренним изгибающим моментом M в любом сечении нити выражается соотношением

$$M = \beta\sqrt{PH}, \qquad (9)$$

где безразмерная величина β определяется формулой $\beta = 2k\cos\alpha$.

Тогда, принимая во внимание $\frac{D}{2} = \frac{H}{M_0}$, диаметр упругой линии игольной дуги равен

$$D = \frac{H}{k\sqrt{PH}\cos\alpha_0}. \qquad (10)$$

В нашей задаче $\delta = 90^\circ$ и $x = y'$, $y = -x'$.

Переход к системе координат X, Y определится формулами

$$\frac{X}{\ell} = \frac{x}{\ell}\cos\gamma + \frac{y}{\ell}\sin\gamma,$$
$$\frac{Y}{\ell} = \frac{y}{\ell}\cos\gamma - \frac{x}{\ell}\sin\gamma. \qquad (11)$$

Уточненный расчет формы и длины нити в петле должен предусматривать учет двоякой кривизны нити в петле, возникающий вследствие перехода нити с лицевой стороны на изнаночную и обратно. При этом основные уравнения и формулы плоской петли распространяются на пространственную нить. Если высота петельного ряда реального трикотажа равна B, то для плоской петли этот параметр определится выражением $\tilde{B} = \frac{B\psi}{\sin\psi}$, где ψ – угол между касательной в точке контакта O и плоскостью полотна.

Опыты выявляют незначительные изменения угла ψ для довольно большого интервала модуля петли – параметра, представляющего собой отношение длины нити в петле к диаметру нити.

Среднее значение угла ψ = 29,7° [1] определено с ошибкой 5,4% при уровне значимости 0,05 и может быть принято для расчетов.

Координата концевой точки 1:

$$X_1 = \frac{\tilde{B}}{2} + \frac{H\sin\gamma}{2k\sqrt{PH}\cos\alpha_0}.$$

Вторая координата определяется из соотношения

$$A = 2\left(b - \frac{d}{\cos\gamma}\right) \text{ (рис.1)},$$

где A– петельный шаг; b – ширина петли в точке контакта O; d – диаметр нити.

С учетом $b = D\cos\gamma$ получаем координату концевой точки 1:

$$Y_1 = \frac{d}{2\cos\gamma}.$$

Диаметр игольной дуги D вычисляется из моментного коэффициента подобия

$$\beta_0 = \frac{M_0}{\sqrt{PH}}:\ D = \frac{H}{k\sqrt{PH}\cos\alpha_0}.$$

Таким образом, для вычисления пяти неизвестных P, ℓ, k, α_0, γ запишем пять уравнений:

$$k\sin\alpha_0 = 0,707, \tag{12}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} - \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{P\ell^2}{H}}, \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\frac{\dfrac{\tilde{B}}{2} + \dfrac{H\sin\gamma}{2k\sqrt{PH}\cos\alpha_0}}{\ell} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{P\ell^2}{H}}} k\cos\alpha_0\cos\gamma + \\ + \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\dfrac{P\ell^2}{H}}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2} d\alpha - \int_0^{\alpha_0} \sqrt{1-k^2\sin^2} d\alpha\right)\right]\sin\gamma,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\frac{d}{2\ell\cos\gamma} = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\dfrac{P\ell^2}{H}}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2} d\alpha - \int_0^{\alpha_0} \sqrt{1-k^2\sin^2} d\alpha\right)\right]\cos\gamma - \frac{2}{\sqrt{\dfrac{P\ell^2}{H}}} k\cos\alpha_0\sin\gamma, \tag{15}$$

$$A = 2\left(\frac{H\sin\gamma}{k\sqrt{PH}\cos\alpha_0} - \frac{d}{\cos\gamma}\right). \tag{16}$$

Вычислив неизвестные, получим длину нити в петле, выражение для которой имеет вид

$$L = 4\left[\ell + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\frac{H}{2k\cos\alpha_0\sqrt{PH}}\right]. \tag{17}$$

Подсчитаем длину нити в петле, образованной из вискозной нити линейной плотности 8,4 текс. Исходные данные для расчета: петельный шаг A = 0,91 мм; высота петельного ряда B = 0,74 мм; диаметр нити d = 0,17 мм; жесткость нити при изгибе H=0,29 сН·мм^2 (жесткость H определена по теории и методике, разработанной нами).

Решение системы (12)…(16) с учетом $\tilde{B} = 0,78$ мм дает: сила контактного взаимодействия петель P = 1,977 сН; длина упругой линии O1 ℓ = 0,511 мм; модуль эллиптического интеграла k = 0,912; амплитуда эллиптического интеграла α_0 = 0,888; угол γ = 0,311.

Вычисленная по формуле (16) длина нити в петле равна L = 3,721 мм. Расчет при этих условиях по формуле А. С. Далидовича – $L = \frac{\pi}{2}A + 2B + \pi d = 3,443$ мм.

На первый взгляд, разность в приведенных величинах несущественна, всего 0,3 мм. Но если принять во внимание, например, что в чулочном изделии содержится около 880 тысяч петель, то указанная разность достигает 264 м, и в этом смысле приведенный пример не является исключением.

Теперь перейдем к другой задаче, технологически, возможно, более важной: по заданной длине нити в петле L определить петельный шаг A и высоту петельного ряда B.

Воспользуемся первыми четырьмя уравнениями (12)…(15) предыдущей задачи. Присоединим к ним выражение (17) для длины L, которое остается в силе в этой новой задаче, а ее численное значение нам известно. Но здесь, наряду с неизвестными P, ℓ, k, α_0, γ, появляется шестая неизвестная $\tilde{B}$. Недостающее уравнение получим из условия равенства моментов в точке O участка O1 (рис. 2).

Величина внутреннего изгибающего момента M_0 согласно (9) будет

$$M_0 = 2k\cos\alpha_0\sqrt{PH}.$$

Момент от силы P в координатах x'y' равен

$$M_0 = P\left(\frac{\tilde{B}}{2} + 2k\cos\alpha_0\sqrt{PH}\sin\gamma - \frac{d}{2}\frac{\mathrm{tg}\gamma}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma.$$

Тогда придем к дополнительному уравнению, замыкающему систему шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\frac{2k\cos\alpha_0\sqrt{PH}}{P\left(\frac{\tilde{B}}{2} + 2k\cos\alpha_0\sqrt{PH}\sin\gamma - \frac{d}{2}\frac{\mathrm{tg}\gamma}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma} = 1. \quad (18)$$

Из решения системы при условиях предыдущей задачи и L=3,721 мм находим: P=1,979 сН; ℓ=0,506 мм; k=0,91; α_0=0,89; γ=0,302; $\tilde{B}$=0,774 мм.

Вычисление петельного шага по формуле (16) дает A=0,913 мм.

Возвращаясь к исходным значениям в задаче определения длины нити в петле L, заметим, что вычисленная L=3,721 мм получена при A=0,91 мм и $\tilde{B}$=0,78 мм. Это важно отметить в связи с тем, что можно утверждать о правильности решения.

Незначительное отклонение $\tilde{B}$ объясняется принятой усредненной величиной угла ψ, которая все же не является постоянной для всех видов трикотажа переплетения кулирная гладь.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: РИО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001.

2. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука. 1986.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 24.04.06.