УДК 539.434:677.494

КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.В. ДЕМИДОВ, А.Г. МАКАРОВ, А.М. СТАЛЕВИЧ

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

В настоящее время общепризнанным в теории нелинейно-наследственной вязкоупругости полимеров считается физический подход, основанный на идее Александрова-Гуревича [1] учета активирующего влияния приложенного напряжения или деформации на ускорение деформационных процессов. Основой же построения математических моделей нелинейно-наследственной вязкоупругости является принцип Больцмана [2] суперпозиции откликов на предысторию деформирования, аналитически выраженный в интегральных соотношениях Больцмана-Вольтерра [3].

Так, нелинейно-наследственной релаксации соответствует определяющее интегральное уравнение

$$\sigma_t = E_o\varepsilon_t - \left(E_o - E_\infty\right)\int_0^t \varepsilon_\theta \varphi'_{\varepsilon;t-\theta} d\theta, \quad (1)$$

где t – время; ε_t – деформация; σ_t – напряжение; E_o – модуль упругости; E_∞ – модуль вязкоупругости; $\varphi'_{\varepsilon t}$ – ядро релаксации.

Аналогичное определяющее уравнение соответствует нелинейно-наследственной ползучести:

$$\varepsilon_t = D_o\sigma_t + \left(D_\infty - D_o\right)\int_0^t \sigma_\theta \varphi'_{\sigma;t-\theta} d\theta, \quad (2)$$

где D_o – начальная упругая податливость; D_∞ – предельно-равновесная податливость; $\varphi'_{\sigma t}$ – ядро запаздывания.

В качестве релаксационной функции $\varphi_{\varepsilon t}$ и функции запаздывания $\varphi_{\sigma t}$ выбирается, как правило, одна из следующих функций [4]:

$$\varphi_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{a_n}\ln\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3)$$

– интеграл вероятностей (ИВ), характеризующий нормальное распределение;

$$\varphi_t = \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-A}} = \frac{1}{2}\left(1 + \text{th}\left(\frac{A}{2}\ln\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (4)$$

– степенная функция или гиперболический тангенс (ГТ);

$$\varphi_t = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^k} \quad (5)$$

– функция Кольрауша (ФК), график которой не обладает свойством симметрии, в отличие от ИВ и ГТ, но имеющая более простой аналитический вид (здесь a_n, A, k – параметры интенсивности процессов релаксации или ползучести, t/τ – приведенное время).

Кроме указанных функций для прогнозирования нелинейно-наследственной вязкоупругости применяется нормированный арктангенс логарифма приведенного времени (НАЛ) [5]:

$$\varphi_t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b_n}\ln\frac{t}{t_1}\right), \qquad (6)$$

где b_n – структурный параметр интенсивности процесса релаксации или ползучести, характеризующий скорость процесса.

Следует заметить, что функции НАЛ соответствует распределение Коши, обладающее важным свойством: среднее арифметическое случайных величин, распределенных по нормированному закону Коши, также распределено по нормированному закону Коши.

Данное обстоятельство оправдывает выбор функций релаксации и запаздывания (6) в качестве основы математической модели вязкоупругости текстильных материалов, так как любой текстильный материал представляет собой сложную макроструктуру, состоящую из более простых элементов (нитей, волокон, макромолекул и т.д.). Следовательно, спектры релаксации и запаздывания представляют собой сумму элементарных спектров, соответствующих более простым элементам, распределенных также по закону Коши.

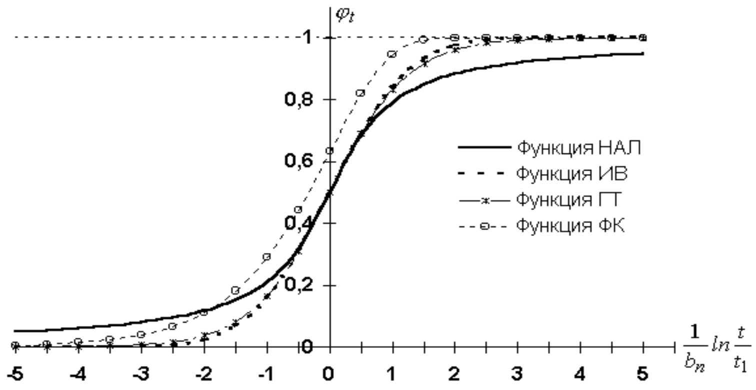

Рис. 1

Графики приведенных функций релаксации и запаздывания приведены на рис. 1.

Наличие нескольких математических моделей, использующих разные функции релаксации и запаздывания, также оправдано, так как позволяет получать не зависящие друг от друга результаты прогнозирования деформационных процессов. Вязкоупругие характеристики, полученные усреднением деформационных характеристик, определенных с помощью различных методов, обладают большей степенью достоверности, чем характеристики, полученные по одному методу.

При аппроксимации процессов релаксации и ползучести нормированными функциями возникает вопрос о правомерности такого подхода.

Ответ на данный вопрос дают критерии правдоподобия [6], применение которых позволяет оценить значение относительной погрешности такой аппроксимации. Компьютеризация указанных критериев позволяет получить наглядное средство подтверждения достоверности рассчитанных вязкоупругих характеристик.

Аналитическую взаимосвязь модуля релаксации и податливости получаем из уравнения нелинейно-наследственной релаксации (1) при σ = const:

$$E_o D_{\sigma t} + \int_0^t D_{\sigma\theta} E'_{\varepsilon;t-\theta} d\theta = 1, \qquad (7)$$

где $E'_{\varepsilon t} = \partial E_{\varepsilon t} / \partial\left(\ln\left(t/t_1\right)\right)$.

Аналогично из уравнения нелинейно-наследственной ползучести (2) при ε =const получаем

$$D_o E_{\varepsilon t} + \int_0^t E_{\varepsilon\theta} D'_{\sigma;t-\theta} d\theta = 1 , \qquad (8)$$

где $D'_{\sigma t} = \partial E_{\sigma t} / \partial\left(\ln\left(t/t_1\right)\right)$. Чем удачнее выбор интегральных ядер, тем меньше отклонение левых частей (7) и (8) от "единицы".

Данные соотношения можно рассматривать как интегральные критерии соответствия модуля релаксации и податливости, а следовательно, и остальных вязкоупругих характеристик.

В качестве образца, на котором опробовались приведенные критерии (7), (8), предлагается многокомпонентная пряжа, полученная кольцевым прядением на кафедре механической технологии волокнистых материалов СПбГУТД (хлопок 30%, лен 20%, лавсан 50%, линейная плотность 29 текс, разрывное напряжение $\sigma_p = 225$ МПа , разрывная деформация $\varepsilon_p = 14\,\%$) [7].

Графическая интерпретация критериев (7), (8) является наглядным средством наилучшего выбора интегральных ядер релаксации и запаздывания из числа предложенных. Обозначая

$$\chi\left(\ln\frac{t}{\tau_\sigma}\right) = E_o D_{\sigma t} + \int_0^t D_{\sigma\theta} E'_{\varepsilon;t-\theta} d\theta , \qquad (9)$$

$$\chi\left(\ln\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) = D_o E_{\varepsilon t} + \int_0^t E_{\varepsilon\theta} D'_{\sigma;t-\theta} d\theta , \qquad (10)$$

приведем результаты применения критериев (7)–(а), (8)–(b) к многокомпонентной пряже (рис.2 – T=20°), полученные для интегральных ядер, соответствующих функции НАЛ, и аналогичные результаты для ядер, соответствующих интегралу вероятностей (рис.3 – (7)–(а), (8)–(б); T = 20°).

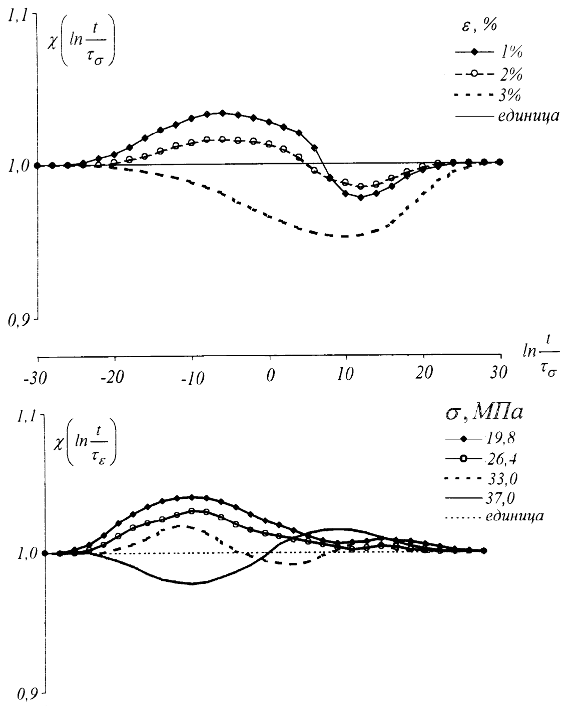

Рис. 2

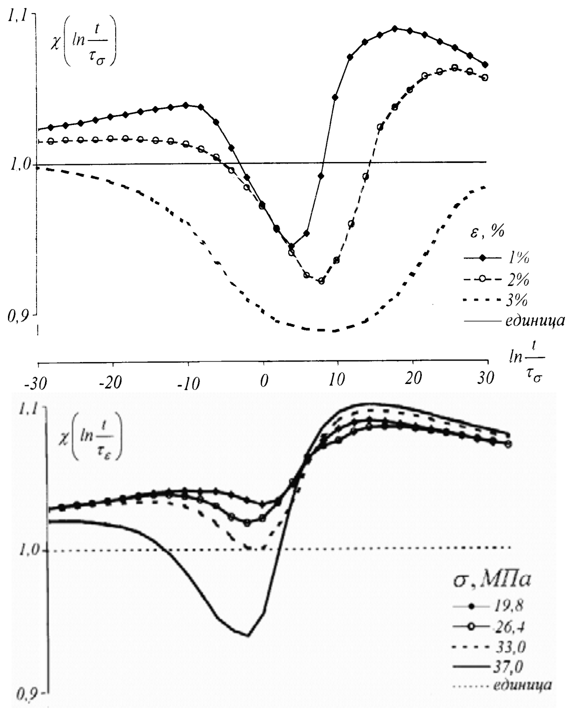

Рис. 3

Данные результаты визуально показывают преимущества первой из них при моделировании деформационных свойств рассматриваемой пряжи.

Интегральные критерии (7), (8) можно рассматривать так же, как критерии оптимального выбора математической модели вязкоупругости текстильных материалов:

$$\left| E_o D_{\sigma t} + \int_0^t D_{\sigma\theta} E'_{\varepsilon;t-\theta} d\theta - 1 \right| \to \min, \qquad (11)$$

$$\left| D_o E_{\varepsilon t} + \int_0^t E_{\varepsilon\theta} E_{\varepsilon\theta} D'_{\sigma;t-\theta} d\theta - 1 \right| \to \min. \qquad (12)$$

Критерии оптимальности выбора математической модели вязкоупругости (11), (12) можно использовать для численного решения задачи о резольвенте интегральных уравнений (7), (8), то есть задачи нахождения оптимального ядра релаксации по заданному ядру запаздывания и, наоборот, нахождению оптимального ядра запаздывания по заданному ядру релаксации. Данная задача решена в аналитическом виде только для случая линейной вязкоупругости [8].

Сложность решения указанной задачи при нелинейности вязкоупругих свойств текстильных материалов объясняется необходимостью учета активирующего влияния приложенной деформации и нагрузки на времена релаксации и запаздывания. Указанное влияние зависит от многих факторов – компонентного состава, внутренней структуры текстильных материалов, температуры и т.д.

Учет активирующего влияния деформации и нагрузки на ускорение процессов релаксации и ползучести возможен только системной обработкой экспериментальных данных, что реально возможно благодаря компьютеризации вычислительных методик.

В силу сказанного аналитическое решение задачи о резольвенте определяющего интегрального уравнения нелинейно-наследственной релаксации и нелинейно-наследственной ползучести, то есть нахождение ядра релаксации по ядру запаздывания и наоборот, затруднено. Однако, применяя интегральный критерий правдоподобия нелинейно-наследственной релаксации (7) или нелинейно-наследственной ползучести (8), по заданному интегральному ядру релаксации можно численно рассчитать интегральное ядро запаздывания и обратно. Критерием расчета служат условия минимизации (11), (12).

Критерии оптимальности (11), (12) с уровнем значимости $\alpha_{\sigma t} \le 0{,}05$, $\alpha_{\varepsilon t} \le 0{,}05$ (где $\alpha_{\sigma t} = \chi(\ln(t/\tau_\sigma))$, $\alpha_{\varepsilon t} = \chi(\ln(t/\tau_\varepsilon))$) применялись к ядрам релаксации и запаздывания многокомпонентной пряжи, заданным в виде функции НАЛ.

При этом было получено численное обращение нормированной функции релаксации $\varphi_{\varepsilon t}$ и запаздывания $\varphi_{\sigma t}$. Пример обращения функции релаксации $\varphi_{\varepsilon t}$ в виде НАЛ для многокомпонентной пряжи приведен на рис.4 (T = 20°).

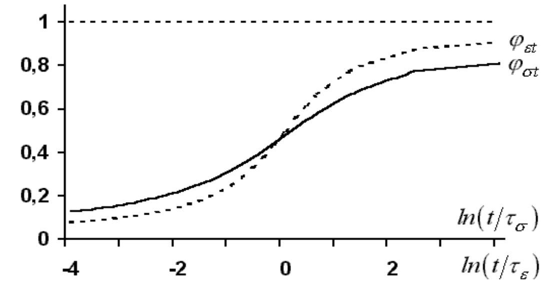

Рис.4

Как видно из приведенного примера, график расчетной функции запаздывания имеют форму, близкую к форме графика функции НАЛ. Данное обстоятельство позволяет сделать еще один вывод о правомочности выбора функции НАЛ в качестве основы математической модели. Обращая функции релаксации и запаздывания, соответствующие другим нормированным функциям, можно отобрать ту из них, которая наилучшим образом подходит для моделирования деформационных свойств текстильных материалов.

ВЫВОДЫ

1. Получен метод численного решения задачи о резольвенте определяющих интегральных уравнений релаксации и ползучести для случая нелинейности вязкоупругих свойств текстильных материалов.

2. Численное обращение интегральных ядер релаксации и запаздывания, а также соответствующих им нормированных функций в виде нормированного арктангенса логарифма приведенного времени для многокомпонентной пряжи позволяет

сделать вывод о правильности выбора данной функции в качестве основы модели вязкоупругих свойств.

3. Сформулированы критерии оптимальности выбора математической модели вязкоупругости текстильных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуревич Г.И.* О законе деформации твердых и жидких тел // Журнал технической физики. – 1947, №12, 17. С.1491…1502.

2. *Бугаков И.И.* О принципе сложения как основе нелинейных определяющих уравнений для сред с памятью // Механика твердого тела. – 1989, №5. С. 83…89.

3. *Сталевич А.М.* Уравнения нелинейной вязкоупругости высокоориентированных полимеров // Проблемы прочности. – 1981, №12. С. 95…98.

4. *Сталевич А.М.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1980, №3. С.106…107.

5. *Макаров А.Г., Сталевич А.М.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2002, № 3. С.10…13.

6. *Макаров А.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2000, №2. С.12…16.

7. *Труевцев Н.Н. и др.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2002, № 2. С.20…22.

8. *Макаров А.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2002, № 2. С.13…17.

Рекомендована кафедрой сопротивления материалов. Поступила 26.11.05.