

## РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*М.Н. СЕРАЗУТДИНОВ, Р.А. КАЮМОВ, В.В. ХАММАТОВА*

(Казанский государственный технологический университет,  
Казанская архитектурно-строительная академия)

В настоящей статье исследуются методики экспериментального определения механических характеристик и расчета деформирования текстильных материалов под воздействием внешних нагрузок.

Вначале рассмотрим методику экспериментального определения механических характеристик ткани.

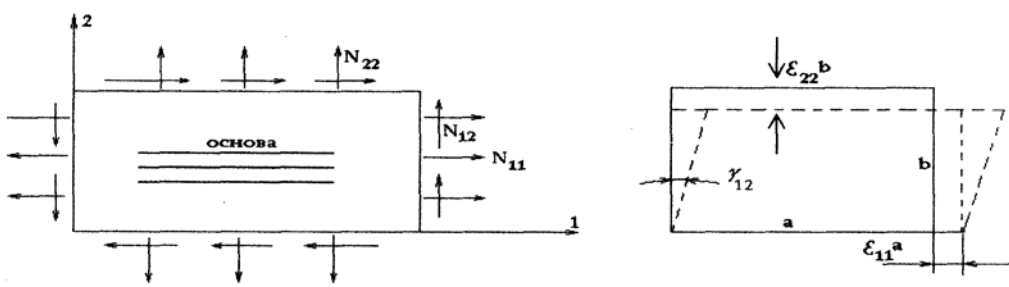


Рис. 1

Возьмем элемент ткани прямоугольной формы (рис. 1), направления основы и утка у него параллельны краям элемента. В дальнейшем под направлением 1 будем понимать направление основы, а под направлением 2 – направление утка.

На выделенный элемент ткани действуют погонные силы  $N_{11}, N_{22}, N_{12}$ , которые вызывают возникновения линейных деформаций  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  и сдвига  $\gamma_{12}$ . Зависимость между погонными силами и деформациями представляется в следующем виде [1]:

$$\{N\} = [D] \{\varepsilon\} \text{ или } \{\varepsilon\} = [S] \{N\}. \quad (1)$$

$$\text{Здесь } \{N\} = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}^T, \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}\}^T,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы  $[D]$  называются жесткостными характеристиками материала, коэффициенты матрицы  $[S]$  – характеристиками податливости. Матрица  $[D]$  может быть выражена через  $[S]$  и наоборот.

Отметим, что при применении пакетов прикладных программ нужно задавать толщину  $h$  ткани и механические характеристики материала:  $E_1$  – модуль упругости в направлении основы;  $E_2$  – модуль упругости в направлении утка;  $G_{12}$  – модуль сдвига;  $\nu_{12}$  – коэффициент Пуассона. Эти величины могут быть вычислены через коэффициенты  $D_{ij}$ , по формулам:

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= D_{12}/D_{11}, \quad \nu_{21} = D_{12}/D_{22}, \\ E_1 &= D_{11} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) / h, \\ E_2 &= D_{22} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) / h, \quad G_{12} = D_{33} / h. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом должно выполняться равенство

$$E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21}.$$

Поскольку при расчете по формулам (1) толщина не используется, то при вычислении  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$  и при применении этих величин в пакетах прикладных программ можно задавать любое значение для  $h$ . В дальнейшем будем принимать  $h = 1$ .

Определение механических характеристик  $D_{ij}$  можно осуществлять непосредственно с использованием уравнений (1) и ряда экспериментальных данных. Изложим методику нахождения  $D_{ij}$  по этапам.

Этап 1. Проводится первая серия из  $n$  экспериментов на растяжение вдоль основы ткани. Обозначим через  $P_i$  – силу растяжения, действующую вдоль основы (индекс  $i$  означает, что параметр относится к эксперименту с номером  $i$ );  $a_i, \Delta a_i$  – соответственно размер и изменение длины образца в направлении основы;  $b_i, \Delta b_i$  – размер и изменение длины образца в направлении утка.

Относительные удлинения вдоль утка и основы вычисляются по формулам:

$$(\varepsilon_{11}^{(1)})_i = \Delta a_i / a_i, \quad (\varepsilon_{22}^{(1)})_i = -\Delta b_i / b_i.$$

В этом случае индекс 1 в скобках означает, что величины получены из первой серии экспериментов, в которых полагалось  $(N_{11}^{(1)})_i = P_i / b_i, (N_{22}^{(1)})_i = 0$ .

Для определения  $D_{11}, D_{12}, D_{22}$  необходимо найти осредненные величины удлинений и погонных сил в каждой серии экспериментов, то есть следует перейти к нормированным параметрам.

В качестве нормирующей величины в каждом эксперименте с номером  $i$  выберем погонную силу  $(N_{11}^{(1)})_i$ . В этом случае осредненные относительные удлинения и погонные силы вычисляются по формулам:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{1}{n} \left[ \frac{(\varepsilon_{11}^{(1)})_1}{(N_{11}^{(1)})_1} + \frac{(\varepsilon_{11}^{(1)})_2}{(N_{11}^{(1)})_2} + \dots + \frac{(\varepsilon_{11}^{(1)})_n}{(N_{11}^{(1)})_n} \right],$$

$$\varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{1}{n} \left[ \frac{(\varepsilon_{22}^{(1)})_1}{(N_{11}^{(1)})_1} + \frac{(\varepsilon_{22}^{(1)})_2}{(N_{11}^{(1)})_2} + \dots + \frac{(\varepsilon_{22}^{(1)})_n}{(N_{11}^{(1)})_n} \right],$$

$$N_{11}^{(1)} = 1, \quad N_{22}^{(1)} = 0.$$

Подставляя в эти формулы выражения  $(\varepsilon_{11}^{(1)})_i, (\varepsilon_{22}^{(1)})_i, (N_{11}^{(1)})_i$ , получим:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{1}{n} \left( \frac{\Delta a_1 b_1}{a_1 P_1} + \frac{\Delta a_2 b_2}{a_2 P_2} + \dots + \frac{\Delta a_n b_n}{a_n P_n} \right),$$

$$\varepsilon_{22}^{(1)} = -\frac{1}{n} \left( \frac{\Delta b_1 b_1}{b_1 P_1} + \frac{\Delta b_2 b_2}{b_2 P_2} + \dots + \frac{\Delta b_n b_n}{b_n P_n} \right) = -\frac{1}{n} \left( \frac{\Delta b_1}{P_1} + \dots + \frac{\Delta b_n}{P_n} \right). \quad (4)$$

Этап 2. Проводится вторая серия из  $m$  экспериментов на растяжение силами  $F_i$  вдоль утка. Экспериментально определяются средние значения относительных удлинений вдоль основы и утка. Вычисления удлинений проводят по формулам, аналогичным (4):

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = -\frac{1}{m} \left( \frac{\Delta a_1}{F_1} + \dots + \frac{\Delta a_m}{F_m} \right), \quad (5)$$

$$\varepsilon_{22}^{(2)} = \frac{1}{m} \left( \frac{\Delta b_1 a_1}{b_1 F_1} + \dots + \frac{\Delta b_m a_m}{b_m F_m} \right),$$

$$N_{22}^{(2)} = 1, \quad N_{11}^{(2)} = 0. \quad (6)$$

Этап 3. Для каждой серии экспериментов зависимость между погонными силами и деформациями (1) представляется в следующем виде:

$$D_{11} \varepsilon_{11}^{(1)} + D_{12} \varepsilon_{22}^{(1)} = 1, \quad D_{12} \varepsilon_{11}^{(1)} + D_{22} \varepsilon_{22}^{(1)} = 0, \quad (7)$$

$$D_{11} \varepsilon_{11}^{(2)} + D_{12} \varepsilon_{22}^{(2)} = 0, \quad D_{12} \varepsilon_{11}^{(2)} + D_{22} \varepsilon_{22}^{(2)} = 1.$$

В векторно-матричной форме система уравнений (7) имеет вид:

$$[B]\{D\} = \{C\}, \quad (8)$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(1)} & 0 & \varepsilon_{22}^{(1)} \\ 0 & \varepsilon_{22}^{(1)} & \varepsilon_{11}^{(1)} \\ \varepsilon_{11}^{(2)} & 0 & \varepsilon_{22}^{(2)} \\ 0 & \varepsilon_{22}^{(2)} & \varepsilon_{11}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Поскольку система уравнений (8) является переопределенной, то для определения  $D_{11}, D_{12}, D_{22}$  используется метод наименьших. Из условия минимума квадратичной невязки системы (8) получаем:

$$[A]\{D\} = \{G\}, \quad (10)$$

где\*  $[B]^T [B]\{D\} = [B]^T \{C\}$ .

Решая систему уравнений (10), находим  $D_{11}, D_{12}, D_{22}$ .

Этап 4. Для определения жесткости на сдвиг  $D_{33}$  необходимо провести серию  $k$  экспериментов на растяжение силами  $R_1, R_2, \dots, R_k$  образцов, вырезанных под углом  $\varphi = 45^\circ$  к основе. Оси координат  $ox, oy$  выбираются параллельно краям образца ткани. Все параметры с индексами  $x, y$  далее отмечаются волнистой линией над буквами.

Определяется нормированное среднее значение относительного удлинения  $\tilde{\varepsilon}_x$  в направлении действия сил  $R_1, R_2, \dots, R_k$ :

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{k} \left( \frac{\Delta c_1 d_1}{c_1 R_1} + \frac{\Delta c_2 d_2}{c_2 R_2} + \dots + \frac{\Delta c_k d_k}{c_k R_k} \right). \quad (11)$$

Для нормированных погонных сил  $\tilde{N}_{xx}, \tilde{N}_{yy}, \tilde{N}_{xy}$  аналогично, как и на предыдущих этапах, полагаем:

$$\tilde{N}_{yy} = 0, \tilde{N}_{xx} = 1, \tilde{N}_{xy} = 0. \quad (12)$$

Второе из уравнений (1) принимает вид:

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = [\tilde{S}]\{\tilde{N}\}. \quad (13)$$

Матрица  $[\tilde{S}]$  связана с  $[S]$  следующим соотношением:

$$[\tilde{S}] = [H][S][H]^T, \quad (14)$$

где  $[H] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -\sin 2\varphi/2 \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & \sin 2\varphi/2 \\ \sin 2\varphi & -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}$ .

Подставляя в уравнение (13) значения вектора  $\{\tilde{N}\}$  (12) и значение  $\tilde{\varepsilon}_{xx}$ , по соотношению (11) получим уравнение:

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = \tilde{S}_{11}. \quad (15)$$

Коэффициенты  $S_{11}, S_{12}, S_{22}$  матрицы  $[S]$  (2) вычисляются по значениям  $D_{11}, D_{12}, D_{22}$ . Следовательно, неизвестным в равенстве (15) является только коэффициент  $S_{33} = 1/D_{33}$ .

Таким образом, соотношение (15) является уравнением с одним неизвестным относительно  $S_{33}$ . Решая это уравнение, получаем:

$$D_{33} = 1/(3S_{11} + 3S_{22} - 2S_{12} + 2\sqrt{S_{11} + S_{22} - 2S_{12}} \sqrt{3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} - 4\tilde{\varepsilon}_{xx}})$$

Отметим, что полученное выражение  $D_{33}$  справедливо только для случая  $\varphi = 45^\circ$ .

Далее рассмотрим математическую модель и расчет деформирования ткани.

Для определения деформаций и напряжений в ткани применялся метод конечных элементов (МКЭ). В нашей работе использовался шестиузловой треугольный элемент второго порядка и  $L_i$  координаты [2]. Разработан пакет программ, основанный на МКЭ, и алгоритмического языка Fortran Power Station. Визуализация

$$D_{33} = 1/(4\tilde{\varepsilon}_{xx} - S_{11} - 2S_{22} - 2S_{12}). \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда в эксперименте можно осуществлять деформацию образца только строго параллельно краям, вдоль линии действия растягивающей силы, то есть скашивание образца. В этом случае  $\tilde{\gamma}_{xy} = 0$ , а  $N_{xy} \neq 0$ . Для вычисления  $N_{xy}$  используем условие  $\tilde{\gamma}_{xy} = 0$ .

С учетом (13) получаем:

$$\tilde{\gamma}_{xy} = \tilde{S}_{13}\tilde{N}_{xx} + S_{23}\tilde{N}_{yy} + \tilde{S}_{33}\tilde{N}_{xy} = 0. \quad (17)$$

В рассматриваемом случае  $\tilde{N}_{yy} = 0$ ,  $\tilde{N}_{xx} = 1$ , поэтому из (17) следует

$$\tilde{N}_{xy} = -\tilde{S}_{13}/\tilde{S}_{33}.$$

Подставляя величины  $\tilde{N}_{xx} = 1$ ,  $N_{yy} = 0$ ,  $\tilde{N}_{xy} = -\tilde{S}_{13}/\tilde{S}_{33}$  в выражение (14), получаем соотношения для определения  $D_{33}$ :

$$\tilde{S}_{11}\tilde{S}_{33} - (\tilde{S}_{13})^2 - \tilde{\varepsilon}_{xx}\tilde{S}_{33} = 0.$$

Решение этого уравнения:

результатов и построения графиков выполнены с применением прикладного пакета Mathematica 4.0.

При расчетах использовался принцип Лагранжа, который в матричной форме можно записать в виде

$$\int_{\Omega} \sigma^T \delta \varepsilon d\Omega = \int_{\omega} p^T \delta u.$$

Здесь  $\Omega$  – область, занимаемая образцом ткани;  $\omega$  – ее граница;  $p$  – вектор сил, приложенных на этой границе;  $\delta \varepsilon$  – вариация

ция вектора деформаций;  $\delta u$  – вариация вектора перемещений.

Из этого принципа получается уравнение

$$[K]\{U\} = \{P\}, \quad (18)$$

где  $[K]$  – глобальная матрица жесткости;  $\{U\}$  – вектор узловых перемещений;  $\{P\}$  – вектор внешних узловых сил.

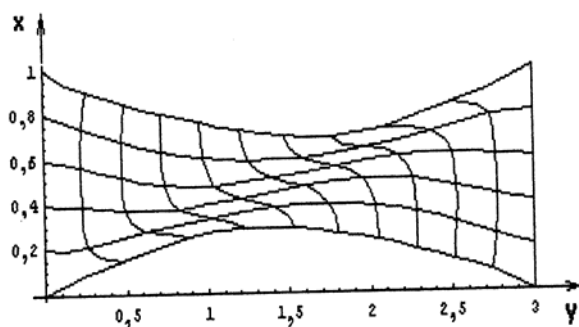


Рис. 2

$$[M] = \begin{bmatrix} (2L_1 - 1)L_1 & 0 & 4L_1L_3 & 0 & (2L_3 - 1)L_3 & 0 & 4L_3L_5 & 0 & (2L_5 - 1)L_5 & 0 & 4L_5L_1 & 0 \\ 0 & (2L_1 - 1)L_1 & 0 & 4L_1L_3 & 0 & (2L_3 - 1)L_3 & 0 & 4L_3L_5 & 0 & (2L_5 - 1)L_5 & 0 & 4L_5L_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $L_i$  являются координатные переменные [2].

## ВЫВОДЫ

1. Отметим, что отличительной особенностью деформирования ткани является ее различная реакция на воздействие растягивающих и сжимающих напряжений (ткань относится к материалам, практически не воспринимающим сжимающие напряжения). Возникающие в материалах напряжения сжатия должны быть очень малыми. С учетом этой особенности методика расчета тканых материалов существенно отличается от методик, используемых в классической теории упругости [3].

2. Для учета того, что в материале не может возникать сжимающих напряжений, сравнимых по величине с растягивающими, использовался следующий подход. Расчет проводился методом последовательных приближений. На первой итерации считалось, что механические характе-

Поле перемещений позволяет найти в теле распределение поля деформаций, а затем – поле напряжений. Матрица  $[K]$  составляется из матриц жесткостей отдельных элементов:

$$[K^m] = \iiint_{\Delta} [B]^T [D][B] dV. \quad (19)$$

В рассматриваемом случае

$$[B] = [Q][M], \quad (20)$$

$$\text{где } [Q] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T,$$

ристики ткани одинаковы во всей области. После определения напряженно-деформированного состояния в точках возникновения сжимающих напряжений модуль упругости в направлении сжатия уменьшался в 1000 раз, то есть в 1000 раз уменьшались напряжения сжатия и расчет напряженно-деформированного состояния повторялся. Указанная итерационная процедура использовалась до установления неизменного напряженно-деформированного состояния, в котором сжимающие напряжения в 1000 раз меньше, чем растягивающие.

3. Для проверки правильности разработанных программ был решен ряд тестовых задач. Опробованы различные способы разбиения области решения. Отличие полученных при решении задач данных от известных составляло менее 2%.

В качестве иллюстрации картины деформирования на рис. 2 представлен вид растянутого образца ткани (основа под углом  $\alpha=60^\circ$  к оси  $x$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тканые конструкционные композиты / Под ред. Т.В. Чу и Ф. Ко. – М.: Мир. 1991.
2. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир. 1975.

3. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа. 1982.

Рекомендована кафедрой дизайна Казанского государственного технологического университета.  
Поступила 15.05.06.

---