

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛЬЦА МЯЛЬНОЙ ПАРЫ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ВОЛОКНИСТОГО СЛОЯ

С.Е.МАЯНСКИЙ

(Костромской государственной технологической университет)

В работе [1] исследуются колебания верхнего вальца мяльной пары с использованием модели с одной степенью свободы, представляющей собой тело, взаимодействующее с двумя пружинами, одна из которых имитирует стеблевый волокнистый слой. При этом отмечается, что суммарное воздействие неровностей слоя по длине вальца заменяется одной обобщенной силой и неровности слоя по ширине в данной модели не учитываются никаким образом.

Для учета влияния переменной жесткости волокнистого слоя по ширине в мяльной паре мяльной машины на свободные колебания системы верхний валец – слой представим слой в виде n -го числа пружин с различными коэффициентами жесткости: $C_{сл.1}$; $C_{сл.2}$; ... $C_{сл.n}$ (рис.1 – модель мяльной пары).

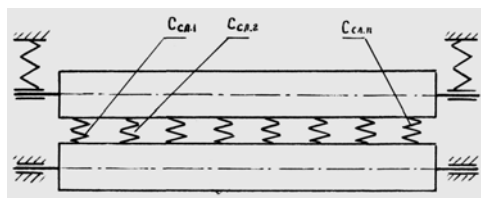


Рис. 1

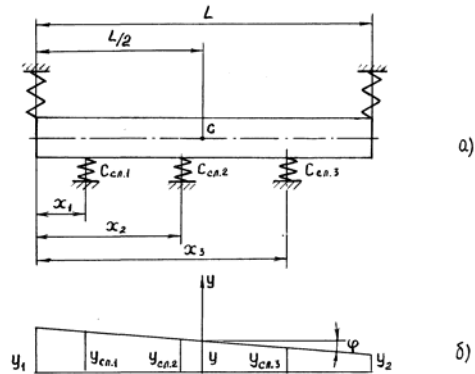


Рис. 2

Предварительно исследуем свободные колебания данной системы, имитируя слой тремя пружинами (рис.2 – расчетная модель свободных колебаний системы валец – слой).

Модель представляет собой цилиндр, установленный на пружинах растяжения-сжатия с приведенными жесткостями C_1 и C_2 ; масса цилиндра – m ; длина – L ; радиус – r ; центр масс C цилиндра находится в его середине.

С цилиндром взаимодействуют три невесомые пружины с приведенными жесткостями $C_{сл.1}$; $C_{сл.2}$; $C_{сл.3}$, расположенные на расстояниях x_1 , x_2 и x_3 от левой кромки слоя (торца цилиндра).

На цилиндр действуют сила тяжести $\underline{m g}$ и реакции пружин.

В данной модели, как и в [1], принято, что толщина слоя превышает величину зазора в поле мятя.

При различной жесткости пружин цилиндр, при выводе его из состояния равновесия, будет совершать не только вертикальные колебания вдоль оси y , но и угловые колебания относительно т. С в вертикальной плоскости – рис.2-б.

За обобщенные координаты примем: $q_1 = y$; $q_2 = \varphi$ – поступательное перемещение центра масс и угол поворота оси цилиндра относительно центра масс в вертикальной плоскости.

Уравнения Лагранжа II рода запишутся так:

$$\begin{aligned} \Pi_{пр} = & \frac{1}{2}C_1y_1^2 - \frac{1}{2}C_1y_{ст}^2 + \frac{1}{2}C_2y_2^2 - \frac{1}{2}C_2y_{ст}^2 + \frac{1}{2}C_{сл.1}y_{сл.1}^2 - \frac{1}{2}C_{сл.1}y_{ст}^2 + \\ & + \frac{1}{2}C_{сл.2}y_{сл.2}^2 - \frac{1}{2}C_{сл.2}y_{ст}^2 + \frac{1}{2}C_{сл.3}y_{сл.3}^2 - \frac{1}{2}C_{сл.3}y_{ст}^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $y_{ст}$ – статическая деформация пружин под действием силы тяжести; y_1 ; y_2 ; $y_{сл.1}$; $y_{сл.2}$; $y_{сл.3}$ – перемещения концов пружин

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Кинетическая энергия цилиндра равна:

$$T = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{J_c\dot{\varphi}^2}{2}, \quad (3)$$

где J_c – момент инерции цилиндра относительно горизонтальной оси z , проходящей через т.С перпендикулярно плоскости xy . Для однородного цилиндра длиной L , радиусом r и массой m имеем

$$J_c = m \left(\frac{L^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right).$$

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии силы тяжести $\underline{m g}$ и сил упругости пружин:

$$\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_{пр}. \quad (4)$$

Потенциальная энергия силы тяжести:

$$\Pi_{mg} = mgy. \quad (5)$$

Потенциальная энергия пружин равна:

при выводе цилиндра из состояния равновесия на расстояние y .

Из рис.2-б следует:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y + \frac{L}{2}\varphi + y_{\text{ст}}, \\ y_2 &= y - \frac{L}{2}\varphi + y_{\text{ст}}, \\ y_{\text{сл.1}} &= y + \left(\frac{L}{2} - x_1\right)\varphi + y_{\text{ст}}, \\ y_{\text{сл.2}} &= y + \left(\frac{L}{2} - x_2\right)\varphi + y_{\text{ст}}, \\ y_{\text{сл.3}} &= y + \left(\frac{L}{2} - x_3\right)\varphi + y_{\text{ст}}. \end{aligned} \right\} (7)$$

С учетом (5), (6) и (7), после соответствующих преобразований, выражение для вычисления потенциальной энергии примет вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= mgy + \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_{\text{сл.1}} + C_{\text{сл.2}} + C_{\text{сл.3}})y^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{C_1L^2}{4} + \frac{C_2L^2}{4} + C_{\text{сл.1}}\left(\frac{L}{2} - x_1\right)^2 + C_{\text{сл.2}}\left(\frac{L}{2} - x_2\right)^2 + C_{\text{сл.3}}\left(\frac{L}{2} - x_3\right)^2\right]\varphi^2 + \\ &+ \left[\frac{C_1L}{2} - \frac{C_2L}{2} + C_{\text{сл.1}}\left(\frac{L}{2} - x_1\right) + C_{\text{сл.2}}\left(\frac{L}{2} - x_2\right) + C_{\text{сл.3}}\left(\frac{L}{2} - x_3\right)\right]y\varphi + \\ &+ y y_{\text{ст}}(C_1 + C_2 + C_{\text{сл.1}} + C_{\text{сл.2}} + C_{\text{сл.3}}) + \varphi y_{\text{ст}} + \\ &+ \left[\frac{C_1L}{2} - \frac{C_2L}{2} + C_{\text{сл.1}}\left(\frac{L}{2} - x_1\right) + C_{\text{сл.2}}\left(\frac{L}{2} - x_2\right) + C_{\text{сл.3}}\left(\frac{L}{2} - x_3\right)\right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Найдем частные дифференциалы от (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= mg + y(C_1 + C_2 + C_{\text{сл.1}} + C_{\text{сл.2}} + C_{\text{сл.3}}) + \\ &+ \varphi \left[\frac{C_1L}{2} - \frac{C_2L}{2} + C_{\text{сл.1}}\left(\frac{L}{2} - x_1\right) + C_{\text{сл.2}}\left(\frac{L}{2} - x_2\right) + C_{\text{сл.3}}\left(\frac{L}{2} - x_3\right)\right] + \\ &+ y_{\text{ст}}(C_1 + C_2 + C_{\text{сл.1}} + C_{\text{сл.2}} + C_{\text{сл.3}}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= \varphi \left[\frac{C_1L^2}{4} + \frac{C_2L^2}{4} + C_{\text{сл.1}}\left(\frac{L}{2} - x_1\right)^2 + C_{\text{сл.2}}\left(\frac{L}{2} - x_2\right)^2 + C_{\text{сл.3}}\left(\frac{L}{2} - x_3\right)^2\right] + \\ &+ y \left[\frac{C_1L}{2} - \frac{C_2L}{2} + C_{\text{сл.1}}\left(\frac{L}{2} - x_1\right) + C_{\text{сл.2}}\left(\frac{L}{2} - x_2\right) + C_{\text{сл.3}}\left(\frac{L}{2} - x_3\right)\right] + \\ &+ y_{\text{ст}} \left[\frac{C_1L}{2} - \frac{C_2L}{2} + C_{\text{сл.1}}\left(\frac{L}{2} - x_1\right) + C_{\text{сл.2}}\left(\frac{L}{2} - x_2\right) + C_{\text{сл.3}}\left(\frac{L}{2} - x_3\right)\right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Найдем члены, соответствующие статистическому равновесию системы из условий:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) \Big|_{\substack{y=0 \\ \varphi=0}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ y=0}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из выражений (9) и (10) получим:

$$0 = mg + y_{\text{ст}} (C_1 + C_2 + C_{\text{сл.1}} + C_{\text{сл.2}} + C_{\text{сл.3}}), \quad (12)$$

$$0 = y_{\text{ст}} \left[\frac{C_1 L}{2} - \frac{C_2 L}{2} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) \right]. \quad (13)$$

Исключая из (8) члены, соответствующие статистическому равновесию систе-

мы, находим значение полной потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} y^2 (C_1 + C_2 + C_{\text{сл.1}} + C_{\text{сл.2}} + C_{\text{сл.3}}) + \\ &+ \frac{1}{2} \varphi^2 \left[\frac{C_1 L^2}{4} + \frac{C_2 L^2}{4} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right)^2 + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right)^2 + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right)^2 \right] + \\ &+ y \varphi \left[\frac{C_1 L}{2} - \frac{C_2 L}{2} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычислим частные дифференциалы от (14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= y (C_1 + C_2 + C_{\text{сл.1}} + C_{\text{сл.2}} + C_{\text{сл.3}}) + \\ &+ \varphi \left[\frac{C_1 L}{2} - \frac{C_2 L}{2} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= \varphi \left[\frac{C_1 L^2}{4} + \frac{C_2 L^2}{4} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right)^2 + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right)^2 + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right)^2 \right] + \\ &+ y \left[\frac{C_1 L}{2} - \frac{C_2 L}{2} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (3), (15) и (16) в (1) и (2),

получим дифференциальные уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} m \ddot{y} + (C_1 + C_2 + C_{\text{сл.1}} + C_{\text{сл.2}} + C_{\text{сл.3}}) y + \\ + \left[\frac{C_1 L}{2} - \frac{C_2 L}{2} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) \right] \varphi = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$J_c \ddot{\varphi} + \left[\frac{C_1 L^2}{4} + \frac{C_2 L^2}{4} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right)^2 + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right)^2 + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right)^2 \right] \varphi + \left[\frac{C_1 L}{2} - \frac{C_2 L}{2} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) \right] y = 0. \quad (18)$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} (C_1 + C_2 + C_{\text{сл.1}} + C_{\text{сл.2}} + C_{\text{сл.3}}) &= a, \\ \left[\frac{C_1 L^2}{4} + \frac{C_2 L^2}{4} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right)^2 + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right)^2 + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right)^2 \right] &= b, \\ \left[\frac{C_1 L}{2} - \frac{C_2 L}{2} + C_{\text{сл.1}} \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) + C_{\text{сл.2}} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + C_{\text{сл.3}} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) \right] &= e. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Очевидно, в случае представления слоя в виде n -го числа пружин (рис.1) получим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} &= -A_1 k^2 \cos(kt + \alpha), \\ \ddot{\varphi} &= -A_2 k^2 \cos(kt + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$a = \left(C_1 + C_2 + \sum_{i=1}^h C_{\text{сл.}i} \right), \quad (20)$$

$$b = \left[\frac{C_1 L^2}{4} + \frac{C_2 L^2}{4} + \sum_{i=1}^h C_{\text{сл.}i} \left(\frac{L}{2} - x_i \right)^2 \right], \quad (21)$$

$$e = \left[\frac{C_1 L}{2} - \frac{C_2 L}{2} + \sum_{i=1}^h C_{\text{сл.}i} \left(\frac{L}{2} - x_i \right) \right]. \quad (22)$$

Тогда дифференциальные уравнения свободных колебаний системы (17) и (18) примут вид:

$$m \ddot{y} + ay + e\varphi = 0, \quad (23)$$

$$J_c \ddot{\varphi} + b\varphi + ey = 0. \quad (24)$$

Решение уравнений (23) и (24) будем искать в виде:

$$\left. \begin{aligned} y &= A_1 \cos(kt + \alpha), \\ \varphi &= A_2 \cos(kt + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

При этом:

Подставляя (25) и (26) в (23) и (24), получим систему двух линейных однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a - mk^2) + eA_2 &= 0, \\ eA_1 + A_2(b - J_c k^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Условием существования отличных от нуля решений системы (27) является равенство нулю определителя коэффициентов при A_1 и A_2 .

Раскрывая этот определитель, приходим к уравнению частот рассматриваемой системы:

$$(a - mk^2)(b - J_c k^2) - e^2 = 0$$

или

$$k^4 - \frac{(mb + J_c a)}{mJ_c} k^2 + \frac{(ab - e^2)}{mJ_c} = 0. \quad (28)$$

Из полученного биквадратного уравнения находятся значения двух частот свободных колебаний системы:

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{(mb + J_c a)}{2mJ_c}} \pm \sqrt{\frac{(mb + J_c a)^2}{4m^2 J_c^2} - \frac{(ab - e^2)}{mJ_c}}. \quad (29)$$

ВЫВОДЫ

1. При исследовании свободных колебаний вальца мяльной пары мяльной машины волокнистый слой представлен в виде совокупности n -го числа пружин с различными коэффициентами жесткости.

2. Получено уравнение для определения двух частот свободных колебаний вальца мяльной пары мяльной машины с учетом неоднородности волокнистого слоя по ширине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьячков В.А. Теоретическое обоснование технологических и конструктивных параметров машин для производства длинных волокон льна: Дис.... докт. техн. наук. – Кострома, КГТУ, 2003.

Рекомендована кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов. Поступила 01.08.06.
