

УДК 677.024

**О РЕШЕНИИ УПРОЩЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
РАВНОВЕСИЯ УТОЧНЫХ НИТЕЙ  
В ЗОНЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОДНОСЛОЙНОЙ ТКАНИ  
ПОЛОТНЯНОГО ПЕРЕПЛЕТЕНИЯ\***

*С.Г. СТЕПАНОВ, И.И. ВОЛКОВ*

**(Ивановская государственная текстильная академия)**

В [1] получена математическая модель взаимодействия основных и уточных нитей в зоне формирования ткани (ЗФТ) полотняного переплетения. Там же показано, что для большинства тканей высоты волн изгиба, прогибы, углы поворота поперечных сечений для всех уточин в ЗФТ являются малыми величинами.

В этом случае равновесие  $i$ -й уточины в ЗФТ описывается одним уравнением [(30), 1]. Найдем решение этого уравнения.

При решении задач статики стержней (жестких на изгиб нитей) эффективными являются приближенные методы, использующие принцип возможных перемещений. Интегральное соотношение для при-

---

\* Научный консультант – проф., докт. техн. наук Г.И. Чистобородов.

ближенного решения задачи о равновесии стержня имеет вид [2]:

$$\int_0^{\ell} L(a_i, \varphi_i) \varphi_j dx = 0, \quad (1)$$

где  $L(a_i, \varphi_i)$  – уравнение равновесия стержня, где искомая переменная (функция прогиба) выражена через функции  $\varphi_i$ ;  $a_i$  – произвольные числа;  $\varphi_i, \varphi_j$  – известные функции, удовлетворяющие краевым условиям задачи;  $\ell$  – длина стержня.

В нашем случае функцию прогиба отрезка  $i$ -й уточины удобнее задать в виде

$$V_i = a_i \varphi_i = a_i \left( 1 - \cos \frac{\pi Z_i}{L_0} \right), \quad (2)$$

$$\int_0^{2L_0} \left[ A_y a_i \alpha_y^4 \cos \alpha_y Z_i + N_i^y a_i \alpha_y^2 \cos \alpha_y Z_i + F_i^y \delta(Z_i - L_0) \right] (1 - \cos \alpha_y Z_i) dZ_i = 0,$$

где  $A_y$  – изгибная жесткость уточной нити;  $N_i^y$  – натяжение в  $i$ -й уточине в ЗФТ;  $F_i^y$  – равнодействующая сила, передаваемая на  $i$ -ю уточину в ЗФТ со стороны нити основы.

После интегрирования с учетом свойства дельта-функции Дирака  $\delta(Z_i - L_0)$  [2] и умножения полученного результата на  $-1$  имеем:

$$A_y a_i \alpha_y^4 L_0 + N_i^y a_i \alpha_y^2 L_0 - 2F_i^y = 0. \quad (3)$$

Натяжение  $N_i^y$  в  $i$ -й уточине в ЗФТ будет отличаться по величине от натяжения в других уточинах. Если отсутствуют экспериментальные данные о натяжении уточин, входящих в ЗФТ, то можно предложить следующий алгоритм определения натяжения в  $i$ -й уточине.

Особенностью деформации уточины в элементе ткани является то, что при увеличении перемещений точек ее оси под нагрузкой растет длина деформированной оси нити, а следовательно, и ее натяжение  $N_i^y$ , являющееся функцией приращения ее

где  $L_0$  – геометрическая плотность по основе.

Нетрудно убедиться, что (2) удовлетворяет краевым условиям задачи:

$$Z_i = 0; \quad V_i = 0; \quad \frac{dV_i}{dZ_i} = 0;$$

$$Z_i = 2L_0; \quad V_i = 0; \quad \frac{dV_i}{dZ_i} = 0.$$

Интегральное соотношение (1) для отрезка  $i$ -й уточной нити в ЗФТ, равновесие которого описывается уравнением [(30), 1] и функцией  $T_i(Z_i)$  [(31), 1], при выборе приближенного решения в виде (2) с учетом того, что в нашем случае  $\varphi_j = \varphi_i = 1 - \cos \alpha_y Z_i$ ,  $\alpha_y = \pi/L_0$ , имеет вид:

длины. При малых прогибах нити  $N_i^y$  можно считать постоянным по длине нити.

Осевое усилие в  $i$ -й уточине при наличии начального натяжения (речь идет о выработке ткани на станке типа СТБ) и линейной зависимости сила – деформация определяется выражением, аналогичным [(10), 3]:

$$N_i^y = N_{нач}^y + E_y S_y \left( \frac{\ell_i}{2L_0} - 1 \right), \quad (4)$$

где  $N_{нач}^y$  – начальное натяжение;  $E_y, S_y$  – модуль продольной жесткости и площадь поперечного сечения нити соответственно;  $\ell_i$  – длина деформированной оси отрезка  $i$ -й уточины.

Для  $\ell_i$  имеем:

$$\ell_i = \int_0^{2L_0} \sqrt{1 + \left( \frac{dV_i}{dZ_i} \right)^2} dZ_i.$$

Считая  $\left( \frac{dV_i}{dZ_i} \right)^2$  малой величиной, раз-

ложим подынтегральное выражение в ряд,

удерживая только два первых члена этого разложения:

$$l_i = \int_0^{2L_0} \left[ 1 + 0,5 \left( \frac{dV_i}{dZ_i} \right)^2 \right] dZ_i. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и учитывая (2), после интегрирования и преобразований получим

$$N_i^y = N_{нач}^y + 0,25E_y S_y \alpha_y^2 a_i^2. \quad (6)$$

С учетом (6) уравнение (3) принимает вид:

$$A_y a_i \alpha_y^4 L_0 + (N_{нач}^y + 0,25E_y S_y \alpha_y^2 a_i^2) a_i \alpha_y^2 L_0 - 2F_i^y = 0$$

или

$$a_i^3 + p_i^y a_i + g_i^y = 0, \quad (7)$$

Применяя формулу Кардано [5], получаем действительное решение:

где

$$p_i^y = \frac{4(A_y \alpha_y^2 + N_{нач}^y)}{E_y S_y \alpha_y^2}, \quad (8)$$

$$a_i = \sqrt[3]{-\frac{g_i^y}{2} + \sqrt{D_i^y}} + \sqrt[3]{-\frac{g_i^y}{2} - \sqrt{D_i^y}}. \quad (13)$$

$$g_i^y = -\frac{8F_i^y}{E_y S_y \alpha_y^4 L_0}. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что в нашем случае, когда  $g_i^y < 0$ , постоянная  $a_i$ , определяемая по формуле (13), будет положительной.

Из условий равенства усилий в зонах контакта основы с уточинами имеем

Максимальный прогиб  $i$ -я уточина имеет при  $Z_i = L_0$ :

$$F_i^y = \int_{S_{k+1}}^{S_k} q_i^0 \cos \varphi ds, \quad (10)$$

$$V_i^{\max} = h_i^y = 2a_i. \quad (14)$$

где  $S_k, S_{k+1}$  – координаты точек на основной нити, определяющие действие распределенной нагрузки  $q_i^0$ ;  $s, \varphi$  – текущие координата и угол поворота сечения основной нити соответственно [4].

С учетом (10) выражение (9) принимает вид:

$$g_i^y = -\frac{8}{E_y S_y \alpha_y^4 L_0} \int_{S_{k+1}}^{S_k} q_i^0 \cos \varphi ds. \quad (11)$$

Кубическое уравнение (7) имеет одно действительное решение, так как его дискриминант

Определим высоту волны изгиба  $h_i^0$  основной нити в сечении, проходящем через центр  $i$ -й уточины в ЗФТ (рис. 1).

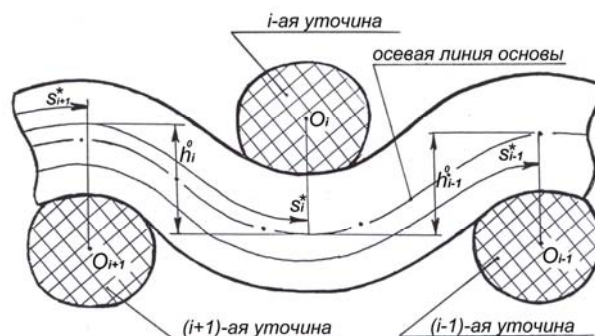


Рис. 1

Координата точки осевой линии нити  $u$  связана с углом  $\varphi$  поворота ее поперечного сечения зависимостью (4) [1]:

$$D_i^y = \left( \frac{p_i^y}{3} \right)^3 + \left( \frac{g_i^y}{2} \right)^2 > 0. \quad (12)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \varphi.$$

Отсюда высота волны изгиба  $h_i^0$  при  $s = s_i^*$ :

$$y = h_i^0 = \left| \int_{s_{i+1}^*}^{s_i^*} \sin \varphi ds \right|. \quad (15)$$

Для высоты волны изгиба  $h_{i-1}^0$  основной нити в сечении, проходящем через центр (i-1)-й уточины, имеем

$$y = h_{i-1}^0 = \int_{s_i^*}^{s_{i-1}^*} \sin \varphi ds, \quad (16)$$

$$\left| \int_{s_{i+1}^*}^{s_i^*} \sin \varphi ds \right| + 2\sqrt[3]{-\frac{g_i^y}{2} + \sqrt{D_i^y}} + 2\sqrt[3]{-\frac{g_i^y}{2} - \sqrt{D_i^y}} = d_o \eta_{об} + d_y \eta_{yb}. \quad (17)$$

Получим геометрическое соотношение для (n+1)-й уточины и основной нити. С этой уточины начинается стабильный участок сформированной ткани, на котором отсутствует скольжение уточных нитей по нитям основы.

Считаем, что прогибы основной и уточных нитей в элементах ткани на стабильном участке малы. В этом случае для отрезка основной нити в элементе ткани на стабильном ее участке имеем уравнение, аналогичное [(30), 1], которое решается тем же приближенным способом.

Однако, в отличие от изложенного выше решения для i-й уточины, здесь необходимо учитывать, что натяжение основной нити  $N_T$  в ее поперечных сечениях, совпадающих с плоскостями, проходящими через центры уточных нитей за ЗФТ – известная величина, равная величине натяжения основной нити в ткани.

где  $s_{i+1}^*$ ,  $s_i^*$ ,  $s_{i-1}^*$  – координаты точек пересечения оси нити с плоскостями, проходящими через центры (i+1)-й, i-й, (i-1)-й уточин, отсчитываемые от начала координат (рис.1).

Формула (15) получена для случая, когда i-й уточине предшествует нисходящий отрезок волны основной нити (рис. 1), на котором  $\varphi < 0$ .

Она остается справедливой и для случая, когда i-й уточине предшествует восходящий отрезок волны ( $\varphi > 0$ ).

С учетом (11)...(15) геометрическое соотношение (12) [1] применительно ко всем уточным нитям (кроме прибавочной и (n+1)-й) и основной нити в зоне формирования ткани принимает вид:

Применив тот же приближенный способ, получим для основной нити за ЗФТ уравнение, налогичное (3), решение которого дает следующее выражение для высоты волны изгиба элемента основной нити [6]:

$$h_{n+1}^0 = \frac{4F_{n+1}^0 L_y}{\pi^2 (A_o \alpha_o^2 + N_T)}, \quad (18)$$

где  $L_y$  – геометрическая плотность по утку;  $F_{n+1}^0$  – усилие, передаваемое со стороны (n+1)-й уточины на основную нить;  $A_o$  – изгибная жесткость основной нити;  $\alpha_o = \pi / L_y$ .

Высота волны изгиба (n+1)-й уточины, определяемая по выражениям, аналогичным (13), (14), будет

$$h_{n+1}^y = 2\sqrt[3]{-\frac{g_{n+1}^y}{2} + \sqrt{D_{n+1}^y}} + 2\sqrt[3]{-\frac{g_{n+1}^y}{2} - \sqrt{D_{n+1}^y}}, \quad (19)$$

где

$$g_{n+1}^y = -\frac{8F_{n+1}^y}{E_y S_y \alpha_y^4 L_o}; D_{n+1}^y = \left(\frac{p_1^y}{3}\right)^3 + \left(\frac{g_{n+1}^y}{2}\right)^2; p_1^y = \frac{4(A_y \alpha_y^2 + N_{нач}^y)}{E_y S_y \alpha_y^2}. \quad (20)$$

Из условия равенства усилий в зоне контакта между нитями получим

$$F_{n+1}^0 = F_{n+1}^y = 2 \int_0^{s_{i+2}} q_{n+1}^0 \cos \varphi ds. \quad (21)$$

$$\frac{4F_{n+1}^0 L_y}{\pi^2 (A_o \alpha_o^2 + N_T)} + 2\sqrt[3]{-\frac{g_{n+1}^y}{2} + \sqrt{D_{n+1}^y}} + 2\sqrt[3]{-\frac{g_{n+1}^y}{2} - \sqrt{D_{n+1}^y}} = d_o \eta_{ов} + d_y \eta_{ув}. \quad (22)$$

## ВЫВОДЫ

Получены аналитическое решение упрощенной математической модели равновесия уточных нитей в ЗФТ и геометрические соотношения (17),(22) на основе формулы Н.Г.Новикова – равенства сумм высот волн изгиба нитей основы и утка сумме их диаметров с учетом вертикального смятия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов С.Г. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 4. С.73...76.

С учетом (18), (19) геометрическое соотношение (12) [1] применительно к (n+1)-й уточине и основной нити будет

2. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978.

3. Степанов С.Г. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 3. С.44...48.

4. Степанов С.Г. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 1. С.47...51.

5. Зельдович Я.Б., Мышкин А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1972.

6. Степанов Г.В., Степанов С.Г. Теория строения ткани. – Иваново.: ИГТА, 2004.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 19.09.06.