УДК 536.21: 677.017.56

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ВОЛОКОН НА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ РАЗРЕЖЕННОГО ВОЛОКНИСТОГО СЛОЯ БЕЗ УЧЕТА ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ

И.П. КОРНЮХИН, И.В. КОЗЫРЕВ, Л.И. ЖМАКИН

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

В настоящей статье рассматривается теплопроводность разреженного волокнистого слоя. Исследования, в которых рассматривалось бы влияние ориентации волокон на величину эффективного коэффициента теплопроводности волокнистого слоя, авторам не известны. Используемое в работе понятие разреженного слоя предполагает пренебрежимо малое влияние контактов между волокнами на величину эффективного коэффициента теплопроводности.

Для расчета эффективного коэффициента теплопроводности волокнистого слоя проведем мысленный эксперимент: рассмотрим существующий слой и внесем в него малые (бесконечно малые) отрезки волокон. После этого проследим, как благодаря такому возмущению изменилась теплопроводность слоя.

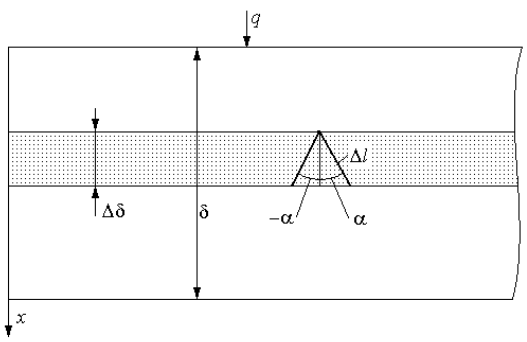

Рис. 1

Рассмотрим плоскопараллельный слой волокон толщиной δ (рис. 1). Пусть направление плотности потока теплоты q совпадает с направлением оси x так, что изотермические поверхности параллельны плоскостям, ограничивающим образец.

Двумя изотермическими поверхностями ограничим слой малой толщины $\Delta\delta$ (в дальнейшем предполагается предельный переход $\Delta\delta \to 0$). В этом слое симметрично разместим два отрезка волокон длиной $\Delta\ell$ так, что каждый из них ориентирован относительно оси x под углами α и -α. Введение таких малых симметричных отрезков не изменит направления q, а также положение изотермических поверхностей.

Оценим величину потока тепла, проходящего через эти волокна. В соответствии с теорией поля [1] величина потока векторного поля, в том числе и потока теплоты, определяется как $\Delta Q = q_n F = qF_n = qF\cos\alpha$, где q_n – проекция вектора q на направление поля; $F_п$ – площадь участка поверхности, перпендикулярная к нормали, в качестве которой рассматривается ось x.

Таким образом, поток тепла переносимого через эти волокна? составит

$$\Delta Q = \frac{\lambda_f}{\Delta\ell}\Delta t 2F_1\cos\alpha\,, \qquad (1)$$

где λ_f – коэффициент теплопроводности материала волокон; Δt – разность температур на границах слоя $\Delta\delta$; F_1 – площадь сечения одного волокна.

Проводимость рассматриваемых участков волокон в соответствии с функцией (1) равна

$$\frac{\lambda_f}{\Delta\ell}2F_1\cos\alpha\,.$$

Эти волокна расположены параллельно с остальными волокнами в слое $\Delta\delta$, что позволит сложить их проводимости:

$$\frac{\lambda_f}{\Delta\ell}2F_1\cos\alpha + \frac{\lambda F}{\Delta\delta} \equiv \frac{\lambda_f 2F_1\cos^2\alpha + \lambda F}{\Delta\ell\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности волокнистого слоя. В представлении и преобразованиях формулы (2) учтем, что $F_1 << F$ и $\Delta\delta = \Delta\ell\cos\alpha$.

Сопротивление рассматриваемого слоя при этом равно

$$\frac{\Delta\ell\cos\alpha}{\lambda_f 2F_1\cos^2\alpha + \lambda F}.$$

В свою очередь слой $\Delta\delta$ последовательно соединен с остальными участками образца толщиной $\delta - \Delta\delta$ (рис. 1), что позволит сложить их сопротивления:

$$R = \frac{\Delta\ell\cos\alpha}{\lambda_f 2F_1\cos^2\alpha + \lambda F} + \frac{\delta - \Delta\delta}{\lambda F} \equiv \frac{1}{\lambda F}\left(\delta - \Delta\delta + \frac{\Delta\ell\cos\alpha}{\frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{2F_1}{F}\cos^2\alpha + 1}\right).$$

Благодаря добавлению волокон проводимость всего слоя увеличилась от значения $\frac{\lambda F}{\delta}$ до значения $\frac{(\lambda + \Delta\lambda)F}{\delta}$, так что

$$\frac{(\lambda + \Delta\lambda)F}{\delta} = \frac{\lambda F}{\delta - \Delta\ell\cos\alpha + \frac{\Delta\ell\cos\alpha}{\frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{2F_1}{F}\cos^2\alpha + 1}}$$

или

$$\lambda + \Delta\lambda = \frac{\lambda}{1 - \frac{\Delta\ell\cos\alpha}{\delta} + \frac{\frac{\Delta\ell\cos\alpha}{\delta}}{1 + \frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{2F_1}{F}\cos^2\alpha}}. \quad (3)$$

Выражение в знаменателе (3) мало отличается от 1, что позволит воспользоваться разложением в ряд вида $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$.

Выполнив такие преобразования, получим

$$\lambda + \Delta\lambda = \lambda\left(1 + \frac{\Delta\ell\cos\alpha}{\delta} - \frac{\frac{\Delta\ell\cos\alpha}{\delta}}{\frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{2F_1}{F}\cos^2\alpha + 1}\right),$$

или

$$\Delta\lambda = \lambda\left(\frac{\Delta\ell}{\delta}\cos\alpha - \frac{\frac{\Delta\ell\cos\alpha}{\delta}}{\frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{2F_1}{F}\cos^2\alpha + 1}\right). \quad (4)$$

Перейдем в формуле (4) к пределу $\Delta\ell \to d\ell$ и $\Delta\lambda \to d\lambda$, в результате получим

$$d\lambda = \lambda\frac{d\ell}{\delta}\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{\frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{2F_1}{F}\cos^2\alpha + 1}\right). \quad (5)$$

Выражение (5) преобразуется к виду

$$d\lambda = \lambda\frac{d\ell}{\delta}\cos\alpha\frac{\frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{2F_1}{F}\cos^2\alpha}{1 + \frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{2F_1}{F}\cos^2\alpha}. \quad (6)$$

Вторым слагаемым в знаменателе (6) можно пренебречь по сравнению с 1. В этом случае

$$d\lambda = \lambda_f\frac{2F_1}{F}\frac{d\ell}{\delta}\cos^3\alpha. \quad (7)$$

Величина $\frac{2F_1}{F}\frac{d\ell}{\delta}$ представляет собой приращение $d\xi$ – доли объема твердой фазы ($\xi = 1 - \varepsilon$, где ε – пористость), обусловленное введением волокон в структуру слоя.

При этом формула (7) преобразуется к виду

$$d\lambda = \lambda_f d\xi \cos^3\alpha .$$

Осреднение по всем возможным ориентациям волокон дает

$$d\lambda = \lambda_f d\xi \overline{\cos^3\alpha} . \qquad (8)$$

Для нахождения среднего значения третьей степени угла ориентации необходимо использовать функцию плотности углового распределения волокон по длинам. Такая функция плотности углового распределения для волокнистого слоя, первоначально находившегося в полностью хаотическом состоянии, а затем испытавшего одноосную деформацию, теоретически была получена в [2]. Там же было проведено ее сопоставление с результатами эксперимента и установлено хорошее согласование.

Эта функция имеет вид

$$\ell(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\gamma^2 \sin\alpha}{\sqrt{\left(\gamma^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^3}}, \; 0 \le \alpha \le \pi, \qquad (9)$$

где γ – параметр функции распределения; α, как и ранее – угол наклона волокон к оси.

Понятие полностью хаотического состояния предполагает отсутствие преимущественной ориентации волокон (даже случайной) в каком бы то ни было направлении. Аналогичная функция для тонкой волокнистой структуры, которую можно рассматривать как плоскую, получена в [3].

Смысл последней легко понять, сопоставив с номограммой углового распределения, полученной в [4]. Для этого весь диапазон изменения углов ориентации от $-\pi/2$ до $\pi/2$ разбивался на конечное число интервалов, выбиралась достаточно малая длина отрезка $\Delta\ell$ и по реплике (отпечатку) ленты на пластичной матрице определялась суммарная длина $\Delta\ell_\Sigma$ всех участков волокон, расположенных в каждом из интервалов углов, независимо от того, к какому волокну эти участки принадлежат.

Отношение величины $\Delta\ell_\Sigma$ к суммарной длине зарегистрированных участков во всех интервалах изменения углов дает номограмму углового распределения для плоской волокнистой структуры, которая хорошо описывается распределением [3]. Подобный же смысл имеет и функция распределения (9) для пространственного волокнистого слоя, подвергнутого одноосной деформации.

Величина $\ell(\alpha)d\alpha$ определяет долю длин участков волокон, ориентированных в пределах шарового пояса, ограниченного полярными углами α и $\alpha + d\alpha$, независимо от того, к каким участкам они принадлежат.

Значения параметра распределения $\gamma = 1$ характеризуют полностью хаотическое пространственное распределение, значения $\gamma > 1$ характеризуют структуру, растянутую вдоль оси, значения $\gamma < 1$ характеризуют сжатый образец.

На интервале изменения углов α от 0 до π плотность распределения (9) представляет собой нечетную функцию, но учитывая, что направления α и $\pi - \alpha$ эквивалентны, при вычислении среднего значения достаточно ограничиться интегрированием в интервале углов от 0 до $\pi/2$, удвоив функцию распределения для сохранения нормировки на 1.

Таким образом,

$$\overline{\cos^3\alpha} = 2\int_0^{\pi/2} \cos^3\alpha\, \ell(\alpha) d\alpha .$$

В результате вычислений для среднего значения куба косинуса получается выражение

$$\overline{\cos^3\alpha} = \frac{2\gamma^2}{\left(\sqrt{\gamma^2-1}\right)^3}\left(\sqrt{\gamma^2-1} - \arcsin\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\right), \; \gamma > 1, \qquad (10)$$

$$\overline{\cos^3\alpha} = \frac{2\gamma^2}{\left(\sqrt{1-\gamma^2}\right)^3}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} - \sqrt{1-\gamma^2}\right),\ \gamma < 1. \quad (11)$$

Интегрирование уравнения (8) производится в пределах изменения ξ от 0 до ξ, при этом теплопроводность слоя изменяется от теплопроводности воздуха λ_a до текущего значения λ для волокнистого слоя, что дает

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_f \xi \overline{\cos^3\alpha}\,. \quad (12)$$

Значение коэффициента теплопроводности материала волокон нам, к сожалению, не известно, поэтому для целлюлозных волокон λ_f принято равным среднему из значений для древесины (сосны) в направлениях вдоль и поперек волокон.

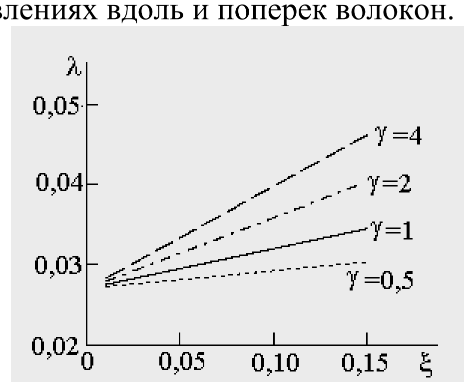

Рис. 2

На рис.2 с помощью графиков показано изменение эффективного коэффициента теплопроводности λ (в единицах СИ) разреженного волокнистого слоя в зависимости от объемной доли твердой фазы при различных значениях параметра ориентации.

С позиций физики явления эти закономерности легко объяснимы. Поскольку коэффициент теплопроводности материала волокон больше, чем у воздуха, то с ростом объемной доли волокон в слое его эффективная теплопроводность растет. С ростом показателя ориентации γ волокна выстраиваются вдоль направления распространения теплоты, и коэффициент теплопроводности волокнистого слоя растет в связи с увеличением $\overline{\cos^3\alpha}$.

В заключение заметим, что найденное значение λ (уравнение 12)) характеризует эффективную теплопроводность волокнистого слоя (строго говоря, коэффициент теплопроводности λ представляет собой физический параметр вещества). Выше в большинстве случаев термин «эффективный» был опущен.

В реальных случаях теплота через волокнистый слой может переноситься и излучением. Влияние радиационного переноса теплоты и сопоставление с результатами эксперимента – тема для другого исследования.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе теоретически, методом возмущений, получено уравнение, определяющее эффективную теплопроводность разреженного волокнистого слоя как функции пористости и параметра ориентации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука,1986.
2. *Kornoohin I.P., Kornoohina T.A.* // Research Journal of Textile and Apparel (Hong Kong). – V.6, №2, 2002.
3. *Корнюхин И.П., Корнюхина Т.А.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. –2004, № 3. С.14…18.
4. *Grudniewsky M.* //Textile Research Journal. – V.34, №12, 1964.

Рекомендована кафедрой промышленной теплоэнергетики. Поступила 01.06.06.