

УДК 677.11.620.1

**УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ РАСТЯЖИМОЙ НИТИ
ПО ШЕРОХОВАТОМУ ЦИЛИНДРУ
С УЧЕТОМ РАЗМЕРОВ ЕЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

А.Б. ЛАПШИН, С.В. БОЙКО

(Костромской государственный технологический университет,
Всероссийский научно-исследовательский институт по переработке лубяных культур)

Наиболее близкими по содержанию к настоящей работе являются [1], [2]. В [1, с. 210...214] решена задача об установившемся движении нелинейно-растяжимой нити при кулоновом трении без учета толщины нити. В [2] рассматривалась задача нестационарного движения нерастяжимой нити при трении по Кулону и при допущении, что коэффициент трения и отношение толщины нити к диаметру цилиндра малы по сравнению с единицей.

В данной статье решена задача об установившемся движении растяжимой по Гуку нити при трении по Амонтону с учетом эксцентрично приложенной силы трения (это означает, что учитываются: толщина нити, поперечные силы и скорость их изменения в зоне контакта).

Рассмотрим плоское движение однородной, растяжимой по Гуку, линейно-упругой на изгиб нити по неподвижной шероховатой цилиндрической поверхности в плоскости нормального сечения цилиндра.

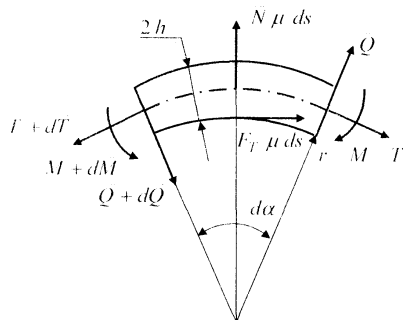


Рис. 1

Система дифференциальных уравнений, описывающих нестационарное движение элемента нити, имеет вид [1] (рис. 1 – схема нагружения элемента нити в зоне фрикционного контакта):

$$\frac{f}{\mu} \left(\frac{\partial T}{\partial s} - \frac{Q}{\rho} \right) - F_T = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (1)$$

$$\frac{f}{\mu} \left(\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{T}{\rho} \right) - N = \frac{v^2}{\rho}, \quad (2)$$

$$\pm \frac{\partial M}{\partial s} + Q + \frac{\mu}{f} h F_T = 0, \quad (3)$$

$$F_T = k N, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial s} \right), \quad (5)$$

$$f = 1 + \alpha T, \quad (6)$$

$$M = H / \rho, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}; \quad \rho = r + h, \quad s = \rho \varphi. \quad (8)$$

В данной системе уравнений приняты следующие обозначения: s – эйлерова дуговая координата; T – натяжение оси нити; Q – перерезывающая сила; M – изгибающий момент; F_T – сила трения; N – сила нормального давления поверхности на нить (силы F_T , N являются массовыми и отнесены к единице массы нити); k – коэффициент трения скольжения; μ – линейная плотность нити; φ – угол охвата;

H – коэффициент жесткости нити на изгиб (по Гуку); ρ – радиус кривизны напряженной оси нити; r – радиус кривизны направляющей цилиндрической поверхности; h – половина толщины нити; f – функция растяжимости оси нити; α – удельное относительное удлинение нити.

В уравнении (3) перед первым членом знаки (+) или (–) соответствуют движению нити по направляющей в сторону увеличения или уменьшения ее кривизны. Направление положительного отсчета s совпадает с направлением движения нити. В уравнении (3) член $\mu h F_T / f$ учитывает эксцентрично приложенную силу трения F_T относительно оси нити (рис. 1).

Рассмотрим участок контакта нити с цилиндрической поверхностью. Здесь радиус оси нити ρ остается постоянным и изгибающий момент $M = \text{const}$. Тогда, исключая из (1)...(8) силу трения F_T , можно получить систему уравнений:

$$\frac{f}{\mu} \left(\frac{\partial T}{\partial s} - \frac{Q}{\rho} \right) - k N = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (9)$$

$$\frac{f}{\mu} \left(\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{T}{\rho} \right) - N = \frac{v^2}{\rho}, \quad (10)$$

$$Q + \mu h k N / f = 0. \quad (11)$$

Исключая из (9)...(11) силу нормального давления N , получим:

$$\frac{v^2}{f} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{f v_0^2}{\rho} \frac{d f}{d \varphi} = \frac{f v_0^2}{\rho} \frac{d f}{d T} \frac{d T}{d \varphi} = \frac{f v_0^2 \alpha}{\rho} \frac{d T}{d \varphi}. \quad (16)$$

С учетом (14)...(16) систему (5), (6), (12), (13) можно представить в виде только двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d T}{d \varphi} + \frac{r}{h} Q &= \alpha \mu_0 v_0^2 \frac{d T}{d \varphi}, \\ \frac{d Q}{d \varphi} + \frac{r+h}{k h} Q + T &= \mu_0 v_0^2 (1 + \alpha T), \end{aligned} \right\}$$

или

$$\frac{f}{\mu} \left(\frac{\partial T}{\partial s} - \frac{Q}{\rho} \right) + \frac{f Q}{\mu h} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (12)$$

$$\frac{f}{\mu} \left(\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{T}{\rho} \right) + \frac{f Q}{k \mu h} = \frac{v^2}{\rho}. \quad (13)$$

Итак, уравнения (5), (6), (12), (13) образуют систему четырех уравнений относительно четырех функций: $T = T(t, s)$, $Q = Q(t, s)$, $f = f(t, s)$, $v = v(t, s)$.

Рассмотрим установившееся движение нити. В этом случае:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

Кроме того [1]:

$$\mu v = \mu_0 v_0, \quad \mu_0 = \mu f, \quad v = v_0 f, \quad (15)$$

где μ_0 – постоянная линейная плотность нити до растяжения; μ – линейная плотность движущейся нити; v – линейная скорость растянутой нити; v_0 – постоянная скорость нерастянутой нити.

Предположим, что толщина нити при растяжении изменяется незначительно ($h = \text{const}$). Тогда правая часть уравнения (12) с учетом (5) (см. [1]):

$$\left. \begin{aligned} (1 - \alpha \mu_0 v_0^2) \frac{d T}{d \varphi} + \frac{r}{h} Q &= 0, \\ \frac{d Q}{d \varphi} + \frac{r+h}{k h} Q + T - \mu_0 v_0^2 (1 + \alpha T) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} [T(1 - \alpha \mu_0 v_0^2) - \mu_0 v_0^2] + \frac{r}{h} Q = 0, & \quad (17) \\ \frac{dQ}{d\varphi} + \frac{r+h}{k h} Q + [T(1 - \alpha \mu_0 v_0^2) - \mu_0 v_0^2] = 0. & \quad (18) \end{aligned} \right\}$$

Обозначим

$$T^* = T(1 - \alpha \mu_0 v_0^2) - \mu_0 v_0^2. \quad (19)$$

Тогда система (17)...(18) сводится к одному уравнению [3]:

$$\frac{d^2(T^*)}{d\varphi^2} + \frac{r+h}{k h} \frac{d(T^*)}{d\varphi} - \frac{r}{h}(T^*) = 0. \quad (20)$$

Добавляя к (20) начальные условия

$$T_0^* = T_0(1 - \alpha \mu_0 v_0^2) - \mu_0 v_0^2, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} T(\varphi) = & \frac{T_0' - \lambda_2 (T_0 - \mu_0 v_0^2 / (1 - \alpha \mu_0 v_0^2))}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(\lambda_1 \varphi) + \\ & + \frac{\lambda_1 (T_0 - \mu_0 v_0^2 / (1 - \alpha \mu_0 v_0^2)) - T_0'}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(\lambda_2 \varphi) + \frac{\mu_0 v_0^2}{1 - \alpha \mu_0 v_0^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Перерезывающая сила (поперечное усилие) $Q(\varphi)$ в зоне контакта находится из (17).

Формула (27) справедлива, если толщина нити соизмерима с радиусом цилиндра

$$T(\varphi) = \left(T_0 - \frac{\mu_0 v_0^2}{1 - \alpha \mu_0 v_0^2} \right) \exp(k \varphi) + \frac{\mu_0 v_0^2}{1 - \alpha \mu_0 v_0^2}. \quad (28)$$

Заметим, что (27) (в отличие от (28)) учитывает не только толщину, но и скорость T_0' изменения силы натяжения в зоне контакта, прилегающей к ведомой ветви, а значит учитывает поперечную силу Q_0 (из (17) следует: $T_0'(1 - \alpha \mu_0 v_0^2) + r Q_0 / h = 0$).

$$(T_0^*)' = T_0'(1 - \alpha \mu_0 v_0^2), \quad (22)$$

получим задачу Коши (20)...(22), решение которой имеет вид [3]:

$$T^*(\varphi) = C_1 \exp(\lambda_1 \varphi) + C_2 \exp(\lambda_2 \varphi), \quad (23)$$

$$\lambda_1 = -\frac{r+h}{2kh} + \sqrt{\frac{(r+h)^2}{4k^2h^2} + \frac{r}{h}}, \quad \lambda_1 > 0, \quad (24)$$

$$\lambda_2 = -\frac{r+h}{2kh} - \sqrt{\frac{(r+h)^2}{4k^2h^2} + \frac{r}{h}}, \quad \lambda_2 < 0, \quad (25)$$

$$C_1 = \frac{(T_0^*)' - \lambda_2(T_0^*)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1(T_0^*) - (T_0^*)'}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (26)$$

Переходя от T^* к T , получим окончательное выражение для расчета силы натяжения (продольного усилия нити) в зоне контакта:

дра (то есть толщиной нити нельзя пренебречь, $h \neq 0$).

Если же $h/r \ll 1$ (то есть можно положить $h = 0$), то справедлива формула [1]:

Далее численными расчетами покажем, что величины h и T_0' существенно влияют на процесс силового взаимодействия нити с шероховатым цилиндром.

$(T'_0 = 0)$

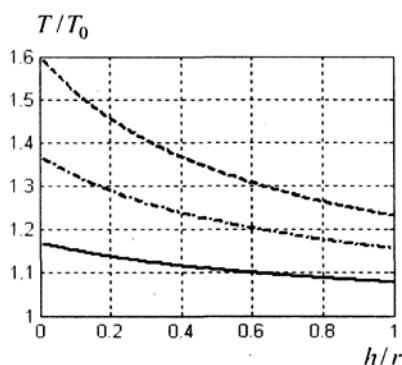


Рис. 2

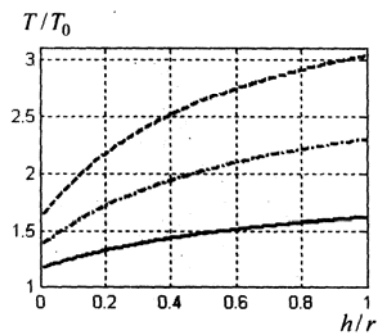


Рис. 3

На рис. 2 представлены зависимости безразмерного комплекса T/T_0 от величины h/r при следующих исходных данных: общий угол охвата $\varphi = \pi/2$; $\mu_0 = 10^{-5}$ кг/м; $v_0 = 10$ м/с; $\alpha = 0,01$; $T'_0 = 0$. Обозначения кривых на рис. 2...4: сплошная кривая – $k=0,1$; штрихпунктирная кривая – $k=0,2$; пунктирная кривая – $k=0,3$.

Рис. 3 отличается от рис. 2 только тем, что для рис. 3 $T'_0 = 100$ Н. Из рис. 2 и 3 следует, что величина T'_0 может качественно изменять вид соответствующих кривых (от убывающих (рис. 2) до возрастающих (рис. 3)).

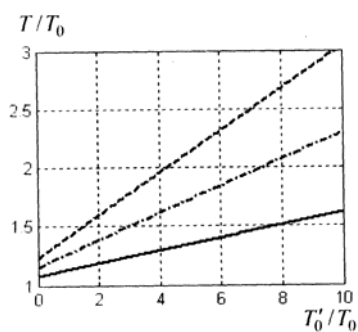


Рис. 4

На рис. 4 представлены зависимости безразмерного комплекса T/T_0 от величины T'_0/T_0 при $h/r=1$ (остальные исходные данные указаны выше).

Из рис. 2...4 следует, что величины h и T'_0 , учитываемые формулой (27), существенно влияют на силу натяжения в зоне контакта.

ВЫВОДЫ

Получены общие решения уравнений механики растяжимой по Гуку нити при ее установившемся движении по неподвижной шероховатой цилиндрической поверхности в плоскости нормального сечения цилиндра с учетом толщины нити и эксцентрично приложенной силы трения (это означает, что учитываются поперечные силы и скорость их изменения в зоне контакта). Показано существенное влияние этих, вновь введенных параметров, на условия силового взаимодействия нити с цилиндром.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Н.И. Статика и установившееся движение гибкой нити. – М.: Легкая индустрия, 1970.
2. Мигушов И.И. // Изв. вузов. Машиностроение. – 1972, № 8. С. 5...9.
3. Лапшин А.Б. // Изв. вузов. Машиностроение. – 2004, № 9. С. 7...13.

Рекомендована кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов КГТУ. Поступила 14.04.06.