УДК 677.022.6.017.045

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЕВОСТЬЯНОВА ПРОЦЕССА СКРУЧИВАНИЯ ДВУХ НИТЕЙ

Е.С. ХОМЯКОВ, А.К. НАУМОВ

(Костромской государственный технологический университет)

Как известно [1], свойства пряжи, состоящей из компонентов с разными линейными плотностями, разными модулями упругости, разными свободными длинами и разными величинами натяжений, зависят от получаемой величины коэффициентов укрутки каждой ее составляющей.

Для теоретического исследования влияния определяющих параметров на процесс скручивания двух нитей (рис. 1 – схема скручивания двух нитей) в рамках математической модели примем следующие допущения:

– деформации растяжения скручиваемых нитей чисто упругие, то есть подчиняющиеся закону Гука;

– скручиваемые нити имеют постоянные по длине линейные плотности и крутки;

– приложенные к осям нитей натяжения сохраняются по длине;

– укруткой от дополнительного докручивания или раскручивания составляющих при скручивании нитей пренебрегаем и учитываем только укрутку по оси крученой нити, то есть вследствие винтообразного положения осей составляющих;

– свободной длиной каждого компонента скручиваемой нити считаем длину оси винтообразной составляющей, а длиной зоны скручивания – расстояние от крутильного органа до выпускной пары.

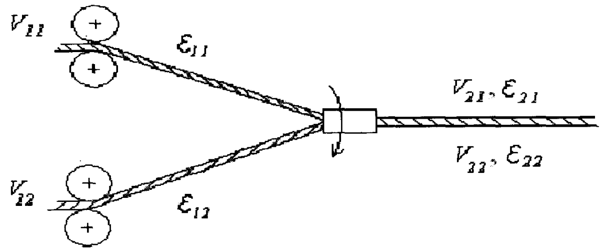

Рис. 1

Тогда [1] уравнение баланса свободной длины для i-й компоненты скручиваемой нити ($i = 1, 2$) в рассматриваемой зоне:

$$\frac{V_{1i}}{1+\varepsilon_{1i}} - \frac{V_{2i}}{(1+\varepsilon_{2i})K_{yi}} = d\left(\frac{L}{(1+\varepsilon_{2i})K_{yi}}\right) / dt, \quad (1)$$

где V_{1i}, V_{2i} – скорости соответственно подачи и выпуска i-й компоненты нити в зоне скручивания; ε_{1i}, ε_{2i} – относительные деформации входящей и выходящей i-й компоненты нити; $K_{yi} = \cos(\beta_i)$ – коэффициент укрутки i-й компоненты нити (β_i – угол, образуемый винтовой линией с осью нити).

Считая, что в зону скручивания обе компоненты поступают недеформированными: $\varepsilon_{1i} = 0$, а относительные деформации и коэффициенты укрутки являются функциями времени, дифференцируя правую часть (1) по времени и выражая относительную деформацию каждой компоненты через величину силы натяжения, модуль упругости и площадь поперечного сечения, приравнивания производные относительной деформации по времени, получим [1]:

$$\frac{d\cos\beta_i}{dt}=\frac{\cos^2\beta_i}{MN\cos^2\beta_i+8\pi K_i^2E_iF_i}\left(\frac{M}{a_{2i}}-\frac{M^2\cos\beta_i}{a_{1i}}-\frac{4N^3K_idF_i}{E_i^2dt}\right),\qquad(2)$$

где $M=N+4\pi K_i^2F_i$, $N=E_i tg^2\beta_i$, $a_{1i}=L/V_{1i}$, $a_{2i}=L/V_{2i}$; F_i – величина натяжения i-й компоненты нити; K_i – крутка i-й компоненты нити; E_i – модуль упругости, $i=1{,}2$.

Анализ полученной системы (2) нелинейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка ($i=1{,}2$), связывающих изменение коэффициента укрутки с изменением натяжения в процессе скручивания и скоростями подачи и выпуска, показывает, что из-за сложности эти уравнения не поддаются методам аналитического решения и могут быть лишь смоделированы, с существенными допущениями, на аналоговых вычислительных машинах АВМ, что и сделано А.Г. Севостьяновым в работе [1].

Предлагаем метод вывода системы дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям (2), однако отличающихся исключительной простотой записи и прозрачностью в физической интерпретации влияния одних параметров процесса скручивания на другие и поэтому названных авторами системой "канонических" уравнений Севостьянова.

Известно, что напряжение и относительная деформация чисто упругой компоненты скручиваемой нити подчиняются закону Гука: $\varepsilon_i=\dfrac{F_i}{E_iS_i}$. Производя очевидные преобразования, получим:

$$\varepsilon_i=\frac{F_i}{E_i\pi r_i^2}=\frac{F_i4\pi^2K_i}{E_i\pi tg^2\beta_i}=\frac{4\pi F_iK_i^2K_{yi}^2}{E_i\left(1-K_{yi}^2\right)}=\frac{4\pi K_i^2}{E_i}\cdot\frac{F_iK_{yi}^2}{1-K_{yi}^2}.\qquad(3)$$

Дифференцируя (3) и (1), принимая допущения, учитываемые при выводе (2), получим систему канонических уравнений Севостьянова [2] в математической модели процесса скручивания двух нитей:

$$\dot K_{yi}=\frac{K_{yi}}{1+\varepsilon_{2i}+\dfrac{2\varepsilon_{2i}}{1-K_{yi}^2}}\left(\frac{1+\varepsilon_{2i}}{a_{2i}}-\frac{(1+\varepsilon_{2i})^2K_{yi}}{a_{1i}}-\frac{\varepsilon_{2i}\dot F_i}{F_i}\right).\qquad(4)$$

Следует отметить преимущество системы канонических уравнений (4) по отношению к системе, полученной Севостьяновым для анализа влияния определяющих параметров на процесс скручивания двух нитей (например, при постоянной величине натяжения $F_i=\mathrm{const}$, производная $\dot F_i=0$, а значит, в переходный период коэффициент укрутки не зависит от величины силы натяжения, что подтверждается моделированием на АВМ с изменением от 0,1 до 0,25 Н с шагом 0,05 Н).

Решая систему (4) относительно времени t, считая $F_i=\mathrm{const}$, получим дифференциальное уравнение I-го порядка с разделяющимися переменными и, интегрируя систему (4), получим общий интеграл (опуская индекс $i = 1, 2$ для каждой компоненты нити):

$$t(\varepsilon_2, K_y) = a_2 \left(\frac{1+3\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2} \ln\left|K_y\right| + \frac{a_1\varepsilon_2}{(1+\varepsilon_2)(a_2(1+\varepsilon_2)-a_1)} \ln\left|K_y - 1\right| - \right.$$
$$- \frac{a_1\varepsilon_2}{(1+\varepsilon_2)(a_2(1+\varepsilon_2)+a_1)} \ln\left|K_y + 1\right| - \tag{5}$$
$$\left. - \frac{a_2^2 - a_1^2 + a_2^2\varepsilon_2(4+3\varepsilon_2)}{a_2^2(1+\varepsilon_2)^2 - a_1^2} \ln\left|K_y - \frac{a_1}{a_2(1+\varepsilon_2)}\right| \right) + C.$$

Анализ полученного общего интеграла показывает, что попытка выразить $K_{yi} = K_{yi}(t)$ как функции коэффициентов укрутки, то есть найти общее решение системы (4), наталкивается на практически непреодолимые математические трудности и не представляется возможным.

Аппроксимируя входящие в (5) коэффициенты укрутки логарифмических функций квадратическими, найдем:

$$K_y = \frac{(1+\varepsilon_2)\left(a_2(1+\varepsilon_2)+a_1\right)}{12a_2^2\varepsilon_2^2 + 16a_2^2\varepsilon_2 + 7a_1a_2\varepsilon_2 + 4a_2^2 + 3a_1a_2 - a_1^2} t +$$
$$+ \frac{a_1\left(12a_2^2\varepsilon_2^2 + 16a_2^2\varepsilon_2 + 3a_1a_2\varepsilon_2 + 4a_2^2 + 3a_1a_2 - a_1^2\right)}{2a_2(1+\varepsilon_2)\left(12a_2^2\varepsilon_2^2 + 16a_2^2\varepsilon_2 + 7a_1a_2\varepsilon_2 + 4a_2^2 + 3a_1a_2 - a_1^2\right)}. \tag{6}$$

Полученное приближенное решение системы (4) дает возможность найти технологические параметры процесса скручивания двух нитей, решив систему $K_{y1} = CK_{y2}$ при $C = 1$ – для получения безобвивочной структуры и при $C < 1$ – для получения обвивочной структуры.

Анализ решения дифференциального уравнения (4) для $i = 1, 2$ методом Эйлера при постоянных a_1, a_2, ε_2 и различных начальных условиях показал, что коэффициент укрутки практически мгновенно асимптотически достигает своего значения и далее практически не изменяется, что дает возможность считать его постоянным (рис.2 – график $K_y = K_y(t)$ решения дифференциальных уравнений (4)).

Считая $K_{yi} = \text{const}$, а значит $\dot{K}_{yi} = 0$, при $F_i = \text{const}$ и $\dot{F}_i = 0$ из (4) получим:

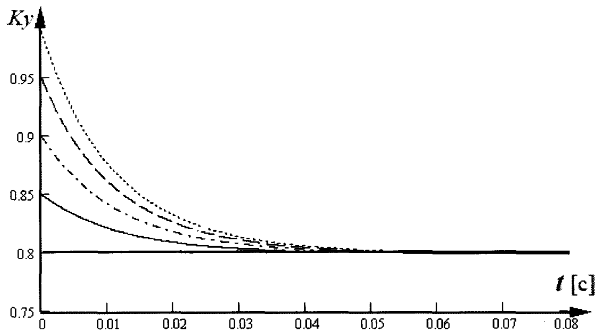

Рис. 2

$$\frac{K_{yi}}{1+\varepsilon_{2i}+\dfrac{2\varepsilon_{2i}}{1-K_{yi}^{2}}}\left(\frac{1+\varepsilon_{2i}}{a_{2i}}-\frac{(1+\varepsilon_{2i})^{2}K_{yi}}{a_{1i}}\right)=0. \qquad (7)$$

Из (7) найдем: $K_{yi}=\dfrac{a_{1i}}{a_{2i}(1+\varepsilon_{2i})}$ и, учитывая, что $a_1=L/V_1$ и $a_2=L/V_2$, выразим K_{yi}:

$$K_{yi}=\frac{V_{2i}}{V_{1i}(1+\varepsilon_{2i})}. \qquad (8)$$

Зависимость (8) позволяет задать скорости подачи и выпуска текстильного продукта, требуемые для получения той или иной структуры. Например, для получения безобвивочной структуры ($K_{y1}=K_{y2}$) необходимо задать скорость подачи одной компоненты скручивания пропорционально скорости подачи другой:

$$V_{11}=\frac{V_{21}}{V_{22}}\frac{1+\varepsilon_{22}}{1+\varepsilon_{21}}V_{12}. \qquad (9)$$

ВЫВОДЫ

1. Зависимость (8) позволяет исследователю (еще на стадии проектирования) рассчитать необходимые скорости подачи и выпуска, достаточные для выработки пряжи требуемой структуры.

2. Уравнение (9) может быть использовано на практике для установления оптимальных скоростей подачи и выпуска при различных линейных плотностях скручиваемых нитей, что устраняет дополнительную операцию – наработку для экспертизы большого числа различных образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Севостьянов А.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1994, №5. С.21…24.

2. *Наумов А.К., Землякова И.В., Хомяков Е.С., Потапова Т.С.* Вывод системы канонических уравнений Севостьянова в математической модели процесса скручивания двух нитей // Вестник КГТУ. – Кострома, 2002, №5. С.17…19.

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 25.12.06.