УДК 677.08.021.16/022

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ СООСНЫХ ЦИЛИНДРОВ В ПРОЦЕССЕ РЕГЕНЕРАЦИИ ВОЛОКНИСТЫХ ОТХОДОВ

В.Д. ФРОЛОВ, Н.Г. ЖАРОВА, И.В. ФРОЛОВА

(Ивановская государственная текстильная академия)

В процессе регенерации текстильных отходов при обработке коаксиальными цилиндрическими поверхностями волновое уравнение с дисперсионным членом дает дисперсию плоских волн, одна из которых имеет вид:

$$u = \Psi(x)e^{-ikt} . \qquad (1)$$

Решим задачу распространения начальных импульсов (в гиперболическом случае) или начальных возмущений (в параболическом случае) при вращении соосных цилиндров в процессе деформации текстильных отходов.

Обозначим через θ (P; t; r) функцию, удовлетворяющую условиям:

если $\alpha \neq 0$

$$\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial\theta}{\partial t} - L(\theta) = 0,$$

$$\theta\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{a}g(P;r) ;$$

если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$

$$\beta\frac{\partial\theta}{\partial t} - L(\theta) = 0 , \quad \Lambda[\theta] = 0 ,$$

$$\theta\big|_{t=0} = \frac{1}{\beta}g(P;r) .$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$u = \int_{r=0}^{t} \theta(P; t - r; r)dr , \qquad (2)$$

который является ключевым при решении задачи об отделении частей от основного фрагмента волокнистой структуры.

При помощи этого интеграла и формулы (1) найдем решение неоднородного трехмерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(x, y, z; t) \qquad (3)$$

при начальных условиях,

$$u\big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 ,$$

$$u(x_0, y_0, z_0; t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \frac{dr}{t-r}\iint f(x, y, z; r)ds_{a(t-r)} .$$

Сделаем в этом интеграле замену переменного $a(t-r)$ на r и получим:

$$u(x_0, y_0, z_0; t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\frac{dr}{r}\iint_{(Sr)} f\left(x, y, z; t - \frac{r}{a}\right)ds_r = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{(Vat)}\frac{f\left(x, y, z; t - \frac{r}{a}\right)}{r}dv , \qquad (4)$$

где V_{at} – объем цилиндра с радиусом at и центром (x_0, y_0, z_0); r – расстояние от переменной точки интегрирования (x,y,z) до центра цилиндра. Выражение с запаздывающим потенциалом (с запаздыванием $\frac{r}{a}$)

означает, что влияние каждой точки (x,y,z) сказывается с запаздыванием при распространении со скоростью a.

При подстановке выражения (1) в (4) получается уравнение

$$a^2\psi'' + (k^2 + c)\psi = 0,$$

решение которого определяет волны с дисперсией, вызванной наличием члена cu, то есть дисперсионного члена.

Не ограничивая общности рассмотрений, можно направить ось x перпендикулярно фазовым плоскостям, тогда v = x и u не будет зависеть от y и z.

Волновое уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu = 0. \qquad (5)$$

Зная характеристики дифференциального уравнения, можно произвести качественный анализ описываемых явлений и дать общий метод решения, в основу которого положим уравнение (5) и ограничимся случаем, когда уравнение имеет вид:

$$\Box u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu = f(x,t), \qquad (6)$$

где a, c – постоянные.

Пусть в плоскости x, t (рис. 1) задана кривая (C), обладающая следующими свойствами:

1) она делит плоскость на две части: одна из них лежит выше, другая ниже (C);

2) какая бы ни была точка $P(\xi, r)$, лежащая в верхней (относительно (C)) полуплоскости, каждая характеристика, проходящая через P, пересекает (C) в одной точке, лежащей ниже P.

Пусть на кривой (C) заданы две функции φ и ψ.

Найдем в верхней (относительно (C)) полуплоскости функцию u(x;t), которая:

а) удовлетворяла бы в этой полуплоскости уравнению (6);

б) удовлетворяла бы на (C) начальным условиям:

$$u = \varphi, \frac{\partial u}{\partial n} = \psi, \qquad (7)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – дифференцирование по нормали к (C), направленной в сторону верхней полуплоскости.

Первое из условий (7) дает возможность найти производную $\frac{du}{ds}$ по касательной к (C). Зная в точках (C) производные по двум направлениям (касательной и нормали), можно найти производную по любому направлению. Поэтому условия (7) задают вдоль (C) производные от u по любому направлению. Вместо второго условия (7) можно задать вдоль (C) производную по любому направлению, не касательному к (C). Вместе с первым из условий (7) это определит также и производную по нормали.

Находим решение через u, а затем – значение функции u в любой точке верхней полуплоскости. Для этой цели возьмем в верхней полуплоскости произвольную точку $P(\xi, r)$ и проведем через нее обе характеристики:

$$(\ell_1): t - r = \frac{1}{a}(x - \xi),$$

$$(\ell_2): t - r = -\frac{1}{a}(x, \xi) \qquad (8)$$

до их пересечения (в точках Q_1 и Q_2) с кривой (C) (рис. 1).

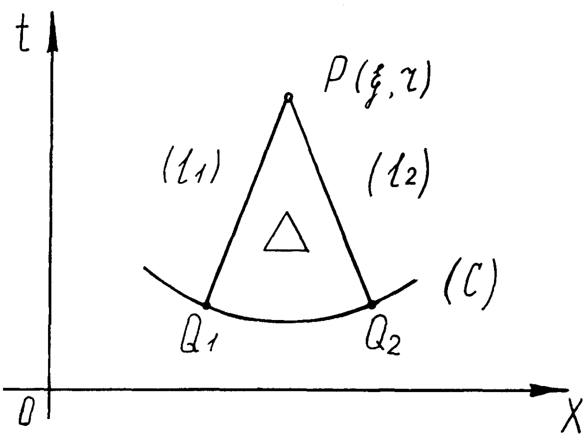

Рис. 1

Треугольник PQ_1Q_2 обозначим Δ и рассмотрим интеграл:

$$I = \iint\limits_{(\Delta)} [v\square u - u\square v]ds, \qquad (9)$$

где v – предположительно произвольная функция.

Выражение под знаком интеграла (9) преобразуется следующим образом:

$$v\square u - u\square v = \frac{\partial}{\partial t}\left[v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\right] + a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \qquad (10)$$

Подставляем выражение (10) в (9) и получаем:

$$I = \iint\limits_{(\Delta)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\right] + a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial v}{\partial u} - v\frac{\partial u}{\partial v}\right]\right\}dx. \qquad (11)$$

Интеграл (11) с помощью теоремы Остроградского заменяем интегралом по границе ($\sum$) области (Δ):

$$I = \int\limits_{(\sum)} -\left[v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\right]dx + a^2\left[u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right]dt =$$

$$= \int\limits_{(\sum)}\left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial v}{\partial x}dt\right] - v\left[\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\partial t\right]\right\} = I_1 = I_2 + I_3, \qquad (12)$$

где

$$I_1 = \int\limits_{Q_1}^{P}\left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial v}{\partial x}dt\right] - v\left[\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right]\right\},$$

$$I_2 = \int\limits_{Q2}^{P}\left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial v}{\partial x}dt\right] - v\left[\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right]\right\},$$

$$I_3 = \int\limits_{Q_1}^{Q_2}\left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial v}{\partial x}dt\right] - v\left[\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right]\right\}.$$

При этом

$$\left.\begin{array}{ll} adt = dx & \text{на } (\ell_1) \\ adt = -dx & \text{на } (\ell_2) \end{array}\right\}.$$

Учитывая соотношения (12), запишем интегралы по характеристикам (ℓ_1) и (ℓ_2) в следующем виде:

$$I_1 = a\int\limits_{Q_1}^{P}\left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial x}dx\right] - v\left[\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right]\right\} = a\int\limits_{Q_1}^{P} udv - vdu, \qquad (13)$$

$$I_2 = a\int\limits_{Q_2}^{P}\left\{-u\left[\frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial x}dx\right] + v\left[\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right]\right\} = a\int\limits_{Q_2}^{P} -udv + vdu. \qquad (14)$$

Дифференциальные вычисления в квадратных скобках под знаком этих интегралов по характеристикам оказались полными дифференциалами.

Вторые слагаемые обоих интегралов интегрируем по частям:

$$I_1 = a\left\{-(uv)_P + (uv)_{Q_1} + 2\int_{Q_1}^{P} udv\right\}, \quad (15)$$

$$I_2 = a\left\{(uv)_P - (uv)_{Q_2} - 2\int_{Q_2}^{P} udv\right\}. \quad (16)$$

Значения интегралов (15) и (16) по характеристикам подставляем в уравнение (12). Получим:

$$2a(vu)_P = a(vu)_{Q_1} + a(vu)_{Q_2} - \int_{Q_1}^{Q_2}\left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial v}{\partial x}dt\right] - v\left[\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right]\right\} +$$

$$+\iint_{(\Delta)} v\Box u ds - \iint_{(\Delta)} u\Box v ds - 2a\int_{P}^{Q_1} udv - 2a\int_{P}^{Q_2} udv. \quad (17)$$

В уравнениях (17) неизвестны последние три слагаемых, для определения значимости которых наложим ограничения на функцию v:

а) $\Box v = 0$,

б) $v = 1$ на характеристиках, проходящих через точку P(ξ , r).

Исходя из ограничений функция v должна зависеть от координат (ξ , r) точки P как от параметров. При этом функция $v(x,t,\xi,r)$ при любых (ξ, r), удовлетворяющих условиям а) и б), и является функцией Римана дифференциального оператора $\Box u$. При наличии в уравнении (17) v как функции Римана данная формула вдоль характеристик $v = 1$, $dv = 0$ примет вид:

$$u_P = \frac{uQ_1 + uQ_2}{2} + \frac{1}{2a}\int_{Q_1}^{Q_2}\left\{v\left[\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right] - u\left[\frac{\partial v}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial v}{\partial x}dt\right]\right\} + \frac{1}{2a}\iint_{\Delta} vfds. \quad (18)$$

Из формулы (18) можно сделать выводы:

1) решение поставленной задачи: функция u_P соответствует задаче Коши, что подтверждается уравнением (18);

2) значение функции u в точке P зависит только от начальных условий по дуге Q_1Q_2 кривой (C) между характеристиками, проведенными через P, и от значений внешней силы f в точках треугольника (Δ) (рис.1);

3) начальное условие в некоторой точке Q кривой (C) или значение внешней силы в некоторой точке Q_1 верхней полуплоскости влияют на решение только в точках, лежащих в верхнем углу между характеристиками, проведенными через данную точку Q или Q_1 (рис. 2).

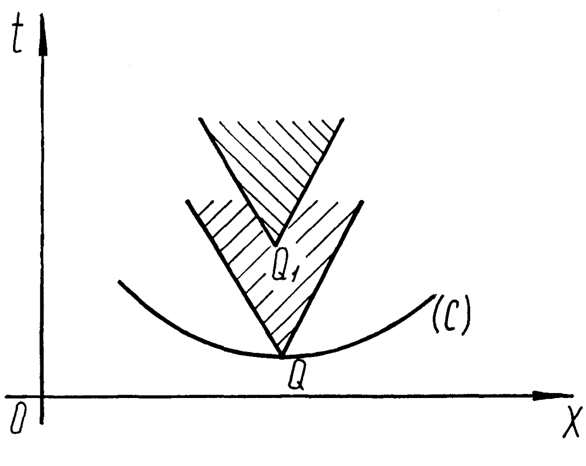

Рис. 2

Если кривой (C) является ось x , то есть начальные условия имеют вид:

$$U\big|_{t=0}=\varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), \qquad (19)$$

то в этом случае абсциссы точек Q_1 и Q_2 запишутся следующим образом:

$$x_1=\xi-ar \quad \text{и} \quad x_2=\xi+ar.$$

Тогда формула (18) примет вид:

$$u=u_1+u_2+u_3, \qquad (20)$$

где

$$u_1(\xi,r)=\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{\xi-ar}^{\xi+ar}\varphi(x)\frac{\partial v(x,0)}{\partial t}dx, \quad (21)$$

$$u_2(\xi,r)=\frac{1}{2a}\int_{\xi-ar}^{\xi+ar}\psi(x)v(x,0)dx, \qquad (22)$$

$$u_3(\xi,r)=\frac{1}{2a}\iint_{(\Delta)}f(x,t)v(x,t)dx. \qquad (23)$$

Функция u_1 является решением задачи распространения начальной деформации $\varphi(x)$, функция u_2 – решением задачи распространения начальной скорости, функция u_3 – решением задачи отделения частей комплексов из волокон.

При определении значения ограничений, наложенных на кривую (C), на которой задаются начальные условия, будем искать v в виде функции от z:

$$v=\Phi(z), \qquad (24)$$

где $$z=\sqrt{(t-r)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \qquad (25)$$

и равна нулю вдоль обеих характеристик, проходящих через точку P(ξ; r) и вещественна в треугольнике (Δ).

При условии v = 1 уравнение (24) принимает вид:

$$\Phi(0)=1. \qquad (26)$$

При условии □v = 0 найдем производные функции v согласно (24) по t и x:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\Phi''\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+\Phi\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\Phi''\frac{(t-r)^2}{z^2}-\Phi\frac{(x-\xi)^2}{a^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\Phi''\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\Phi'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\Phi''\frac{(x-\xi)^2}{a^4z^2}-\Phi'\frac{(t-r)^2}{a^2z^3}$$

и

$$v=\Phi\frac{(t-r)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}{z^2}+\Phi'\frac{(t-r)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}{z^3}-C\Phi=\Phi''+\frac{1}{z}\Phi'-C\Phi. \qquad (27)$$

Условие □v = 0, которому должна удовлетворять функция Римана, приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции Ф:

$$\Phi''+\frac{1}{z}\Phi'-C\Phi=0. \qquad (28)$$

Решением уравнения (28) цилиндрических функций нулевого порядка, удовлетворяющим начальному условию, является:

$$\Phi(z)=J_0\left(z\sqrt{-c}\right)=I_0\left(z\sqrt{c}\right).$$

Таким образом, значение функции u в точке P зависит от начальных условий по дуге Q_1Q_2 кривой (C) между характеристиками. Внешние силы в верхней полуплоскости влияют на протекание технологического процесса: распространение начальной деформации, начальную скорость и отделение частей комплексов из волокон.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. − Гостехиздат, 1949. – Т. 2, гл. XIX, §1.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 25.12.06.