

УДК 539.434:677.494

**МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
МЕХАНИЧЕСКОЙ РЕЛАКСАЦИИ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ***А.В. ДЕМИДОВ, А.Г. МАКАРОВ, А.Г. НОВОСЕЛОВА, А.М. СТАЛЕВИЧ*

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

Разработка и совершенствование методов расчетного прогнозирования напряженно-деформированных состояний текстильных материалов в области действия неразрушающих механических воздействий обусловлено расширяющимся их применением в технических изделиях, а также неразрывно связано с задачами по сравнительному анализу свойств материалов, с исследованиями взаимосвязи свойств со структурой, с целенаправленным технологическим регулированием свойств, с прогнозированием кратковременных и длительных механических воздействий.

На изучаемые деформационные свойства текстильных материалов оказывают влияние температурные воздействия, а также уровни и длительности механических воздействий. Для сравнительного анализа и прогнозирования указанных свойств необходима разработка математической модели на основе физически обоснованного аналитического описания этих влияний. В этом направлении в ряде технологических вузов России ведутся работы по применению уравнений наследственной механики твердых деформируемых тел к различным полимерным материалам, включая текстильные материалы, в том числе синтетические нити, ткани, пряжу, ленты, жгуты и др. Различия в предлагаемых решениях этих задач объясняются их сложностью. Наибольшего внимания заслуживают те варианты решений, когда имеется физическая обоснованность выбранных уравнений в сочетании с минимумом количества используемых парамет-

ров. Следует заметить, что изучение механических свойств указанных материалов, проявляющихся в условиях эксплуатации, гораздо сложнее, чем измерение только лишь разрывных характеристик, которые далеки от объективной оценки свойств материала. Задача значительно усложняется, когда у текстильных материалов помимо вязкоупругих свойств проявляются также и пластические свойства, то есть появляется необратимый компонент деформации, которому также следует уделить особое внимание. Особую ценность имеет решение такой задачи для текстильных материалов, когда помимо сопоставления механических свойств материалов приходится также делать расчеты на условия эксплуатации изделий. Без измерений таких простых процессов как ползучесть, релаксация и восстановление такую задачу решить невозможно. Именно поэтому у материаловедческих лабораторий имеются определенные преимущества по отношению к теоретическим разработкам.

В настоящее время широкое разнообразие текстильных материалов и большой объем накопленных экспериментов доказывают необходимость как разработки новых методов исследования их деформационных свойств, так и создания на этой основе практических методик. Появление новых текстильных материалов с различными вязкоупругими свойствами обосновывает поиск новых математических моделей указанных свойств и применение для исследований компьютерных методов обработки экспериментальной информации. Создание

новых методов исследования механических свойств текстильных материалов способствует наиболее достоверному прогнозированию деформационных процессов.

Для исследования деформационных

$$\sigma(\varepsilon, t) = E_0 \varepsilon - \frac{E_0 - E_\infty}{2} \varepsilon \left(\ell + \text{th} \pi \left(\frac{A_s}{2} \ln \left(\frac{t}{\tau(\varepsilon)} \right) \right) \right) \quad (1)$$

и ползучести (изменение во времени де-

$$\varepsilon(\sigma, t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{E_0 - E_\infty}{2E_0E_\infty} \sigma \left(\ell + \text{th} \pi \left(\frac{A_s}{2} \ln \left(\frac{t}{\tau(\sigma)} \right) \right) \right), \quad (2)$$

где t – время; E_0 – модуль упругости; E_∞ – модуль вязкоупругости; $\tau(\varepsilon)$ – время релаксации (как функция деформации); $\tau(\sigma)$ – время запаздывания (как функция напряжения).

Несомненным достоинством моделей (1) и (2) является то, что они содержат минимальное число параметров, имеющих определенный физический смысл [2]:

– $E_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma(\varepsilon, t)}{\varepsilon}$ – модуль упругости,

характеризующий квазимгновенное значение релаксирующего модуля

$E(\varepsilon, t) = \frac{\sigma(\varepsilon, t)}{\varepsilon}$, то есть его значение в начале процесса релаксации;

– $E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\varepsilon, t)}{\varepsilon}$ – модуль вязкоуп-

ругости, характеризующий квазиравновесное значение релаксирующего модуля, то есть его значение в конце процесса релаксации;

– структурные параметры A_ε и A_σ , характеризующие скорость (интенсивность)

свойств текстильных материалов, наряду с традиционными моделями [1], предлагаются математические модели релаксации (изменение во времени напряжения σ , зависящего от деформации ε):

формации ε , зависящей от напряжения σ)

процессов релаксации и ползучести;

– время релаксации $\tau(\varepsilon)$, характеризующее время прохождения половины процесса релаксации при заданном значении деформации ε ;

– время запаздывания $\tau(\sigma)$, характеризующее время прохождения половины процесса ползучести при заданном значении напряжения σ .

Другим достоинством предлагаемых моделей релаксации (1) и ползучести (2)

является то, что производные $\frac{\partial \sigma(\varepsilon, t)}{\partial \ln(t/\tau(\varepsilon))}$

и $\frac{\partial \sigma(\sigma, t)}{\partial \ln(t/\tau(\sigma))}$ рекуррентным образом вы-

ражаются через параметры модели [3], что оптимальным образом сказывается как на упрощении дальнейших аналитических преобразований, так и на повышении точности определения вязкоупругих параметров-характеристик и, как следствие, на повышении достоверности прогнозирования деформационных процессов:

$$\frac{\partial \sigma(\varepsilon, t)}{\partial \ln(t/\tau(\varepsilon))} = -(E_0 - E_\infty) \varepsilon A_\varepsilon \varphi(\varepsilon, t) (1 - \varphi(\varepsilon, t)), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma(\sigma, t)}{\partial \ln(t/\tau(\sigma))} = \frac{E_0 - E_\infty}{E_0 E_\infty} \sigma A_\sigma \varphi(\sigma, t) (1 - \varphi(\sigma, t)), \quad (4)$$

$$\text{где } \varphi(\varepsilon, t) = \frac{1}{2} \left(\ell + \text{th} \left(\frac{A_\varepsilon}{2} \ln \left(\frac{t}{\tau(\varepsilon)} \right) \right) \right) \quad (5)$$

– функция релаксации;

$$\varphi(\sigma, t) = \frac{1}{2} \left(\ell + \text{th} \left(\frac{A_\sigma}{2} \ln \left(\frac{t}{\tau(\sigma)} \right) \right) \right) \quad (6)$$

– функция запаздывания, что упрощает аналитические преобразования.

Математические модели релаксации и ползучести (1), (2) с нормированной функцией в виде гиперболического тангенса (5), (6), кроме вышесказанного, имеют преимущество перед другими известными математическими моделями при прогнозировании быстротекущих деформационных процессов. Данное обстоятельство вытекает из достаточно быстрой сходимости функций (5) и (6) к своим асимптотическим значениям по сравнению с другими известными математическими моделями и подтверждено сравнением расчетного прогнозирования с экспериментальными данными [4].

Следует заметить, что выбор аналогов нормированных функций (5), (6) для моделей механических свойств полимерных материалов осложняется тем, что нельзя априорно отдать предпочтение какой-то из них. Основным критерием для отбора служит эксперимент. Наличие нескольких нормированных функций для моделирования позволяет сделать оптимальный выбор

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0} \sigma(t) + \frac{E_0 - E_\infty}{E_0 E_\infty} \frac{A_\sigma}{4} \int_0^t \sigma(t-\theta) \left(1 - \text{th}^2 \left(\frac{A_\sigma}{2} \ln \frac{\theta}{\tau(\sigma)} \right) \right) \frac{1}{\theta} d\theta. \quad (10)$$

Аналогично учет коэффициента обратимости при прогнозировании процесса релаксации проводится по формуле

$$\sigma_{\text{прог}} = \eta \sigma(t) + (1 - \eta) E_0 \varepsilon(t), \quad (11)$$

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) - (E_0 - E_\infty) \frac{A_\varepsilon}{4} \int_0^t \varepsilon(t-\theta) \left(1 - \text{th}^2 \left(\frac{A_\varepsilon}{2} \ln \frac{\theta}{\tau(\varepsilon)} \right) \right) \frac{1}{\theta} d\theta. \quad (12)$$

и тем самым повысить надежность прогнозирования.

При прогнозировании деформационных процессов на основе известных интегральных соотношений Больцмана-Вольтерра [5] следует учитывать пластическую компоненту деформации $\varepsilon_{\text{пл}}$ в виде введения в определяющие уравнения вязкоупругости коэффициента обратимости деформации η :

$$\eta = \frac{\varepsilon_{\text{полн}} - \varepsilon_{\text{ост}}}{\varepsilon_{\text{полн}}}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \varepsilon_{\text{полн}} (1 - \eta), \quad (8)$$

где $\varepsilon_{\text{полн}}$ – значение полной деформации, то есть перед снятием нагрузки; $\varepsilon_{\text{ост}}$ – значение остаточной деформации, то есть после снятия нагрузки.

Коэффициент обратимости деформации η определяется экспериментально по деформационно-восстановительному процессу на основе соотношения (8), которое получается из (7).

Учет коэффициента обратимости деформации при прогнозировании процесса ползучести приводит к расчетной формуле для деформации:

$$\varepsilon_{\text{прог}} = (1 - \eta) \varepsilon_{\text{полн}} + \eta \varepsilon(t), \quad (9)$$

где $\varepsilon_{\text{прог}}$ – прогнозируемое значение деформации; $\varepsilon(t)$ – значение деформации, вычисленное по формуле

где $\sigma_{\text{прог}}$ – прогнозируемое значение напряжения; $\sigma(t)$ – значение напряжения, вычисленное по формуле

В качестве сложного режима нагружения рассматривались деформационные процессы, происходящие после квазимгновенного изменения нагрузки.

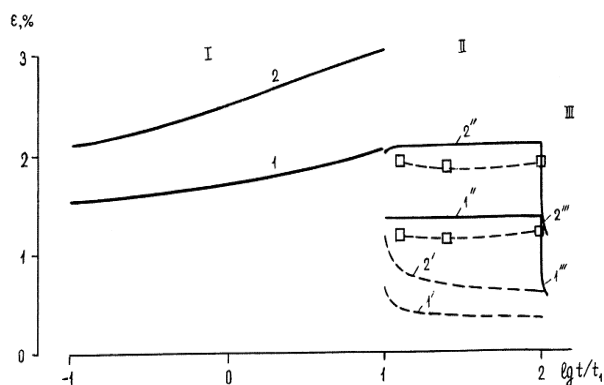


Рис. 1

На рис.1 (деформационно-восстановительный процесс (1; 2) крученой полиэфирной нити с полным разгрузением (1'; 2') и со ступенчатым разгрузением: (1''; 2'') – снятие половинной нагрузки; (1'''; 2''') – полное снятие нагрузки, $T=40^{\circ}\text{C}$. Напряжение: 121 МПа (1), 146 МПа (2); 0 МПа (1'; 2'); 60,5 МПа (1''), 73 МПа (2''); 0 МПа (1'''; 2'''). □ – расчет точек линий 1'', 2''') приведены два варианта такого изменения: деформационно-восстановительный процесс с полным разгрузением и деформационно-восстановительный процесс с частичным разгрузением. Расчет указанных процессов проводится по формулам (9), (10).

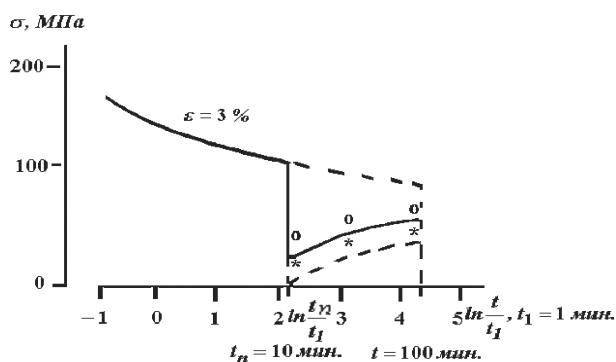


Рис. 2

Аналогично рассматривался сложный режим обратной релаксации, расчет которого проводится по формулам (11), (12). На рис.2 (процесс обратной релаксации

крученой полиэфирной нити с полным разгрузением (---) и со снятием половинной нагрузки (—), $T=40^{\circ}\text{C}$. * – расчет процесса с полным разгрузением; o – расчет процесса с половинной разгрузкой) приведен пример такого процесса с полной и с половинной разгрузкой.

Точность прогнозирования, как простых (при $\sigma=\text{const}$ или $\varepsilon=\text{const}$), так и сложных (при $\sigma\neq\text{const}$ или $\varepsilon\neq\text{const}$) деформационных процессов, зависит не только от надежности определения вязкоупругих характеристик и от выбора соответствующей математической модели релаксации или ползучести, но и от способа вычисления несобственных нелинейно-наследственных интегралов, входящих в формулы (10) и (12), обладающих сингулярной особенностью [6]. Предлагается несколько вариантов вычисления указанных несобственных интегралов, отличающихся друг от друга способами разбиения временной шкалы с учетом специфики прогнозируемого процесса и приводящих к оптимизации вычислительного процесса. Например, учитывается, что при прогнозировании активных (быстропротекающих) процессов, характеризующихся ростом скорости деформирования, целесообразно разбиение временной шкалы по возрастающей геометрической прогрессии – с целью наилучшего учета влияния квазимгновенного фактора деформирования в начале процесса, а при прогнозировании длительных процессов, характеризующихся снижением скорости деформирования, целесообразно разбиение временной шкалы по убывающей геометрической прогрессии – с целью наилучшего учета длительных деформационных воздействий.

В рамках предложенной математической модели релаксации (11), (12) предлагаются методики выделения энергетических компонент – упругой и вязкоупруго-пластической составляющих механической работы деформирования.

Выделение вышеуказанных энергетических компонент важно, например, при оценке эксплуатационных свойств материала. Чем большее значение имеет упру-

гая компонента по сравнению с вязкоупруго-пластической, тем материал более износостойкий. И, наоборот, материалы с преобладанием вязкоупругопластической энергетической компоненты целесообразно использовать, например, при конструировании ударозащитных конструкций, где важна способность материала гасить вредные ударные воздействия, а сохранение

формы материала не столь важно.

Разработаны методики оптимального выбора математической модели из предложенных вариантов. Оптимизация такого выбора основана на применении интегральных критериев релаксации и ползучести, полученных из уравнений нелинейно-наследственной вязкоупругости (10), (12):

$$\left| E_0 D(\sigma, t) + \int_0^t D(\sigma, t - \theta) \frac{\partial E(\varepsilon, \theta)}{\partial \theta} d\theta - 1 \right| \rightarrow \min, \quad (13)$$

$$\left| D_0 E(\varepsilon, t) + \int_0^t E(\varepsilon, t - \theta) \frac{\partial D(\sigma, \theta)}{\partial \theta} d\theta - 1 \right| \rightarrow \min. \quad (14)$$

Чем удачнее выбор интегральных ядер, тем меньше отклонение функций:

$$\chi \left(\ln \frac{t}{\tau(\sigma)} \right) = E_0 D(\sigma, t) + \int_0^t D(\sigma, t - \theta) \frac{\partial E(\varepsilon, \theta)}{\partial \theta} d\theta, \quad (15)$$

$$\chi \left(\ln \frac{t}{\tau(\varepsilon)} \right) = D_0 E(\varepsilon, t) + \int_0^t E(\varepsilon, t - \theta) \frac{\partial D(\sigma, \theta)}{\partial \theta} d\theta, \quad (16)$$

от "единицы":

Критерии оптимальности выбора математической модели вязкоупругости (13), (14) можно использовать для численного нахождения оптимального ядра релаксации по заданному ядру запаздывания и наоборот, нахождению оптимального ядра запаздывания по заданному ядру релаксации [6].

Данная задача для случая нелинейной вязкоупругости в аналитическом виде не решена. Сложность решения указанной задачи при нелинейности вязкоупругих свойств полимерных материалов объясняется необходимостью учета активирующего влияния приложенной деформации и нагрузки на времена релаксации и запаздывания. Указанное влияние зависит от многих факторов – компонентного состава, внутренней структуры полимерных материалов, температуры и т.д. Учет активирующего влияния деформации и нагрузки на ускорение процессов релаксации и ползучести возможен только при компьютерной обработке экспериментальных данных.

Условия (13), (14) позволяют также контролировать степень точности определения вязкоупругих параметров-характеристик и степень надежности прогнозирования деформационных процессов. Рассмотренные критерии могут также использоваться для подтверждения достоверности определения среднестатистических времен релаксации и запаздывания, которые не подлежат непосредственному определению из эксперимента, а определяются только как параметры модели.

Времена релаксации и запаздывания характеризуют времена перехода релаксирующих или запаздывающих частиц из одного устойчивого состояния в другое. Характер таких переходов может быть различным и обусловлен, как строением полимера, так и величиной приложенной деформации или нагрузки. В одних случаях он объясняется конформационными переходами внутри макромолекулы полимера, когда меняется ее форма. В других случаях – происходят сдвиги макромолекул друг относительно друга и т.д.

Для построения обоснованной математической модели механических свойств текстильных материалов полезно иметь представление о спектрах релаксации \bar{N} и запаздывания \bar{Q} , то есть о распределениях релаксирующих или запаздывающих частиц по собственным временам релаксации или запаздывания [6]. Форма спектров релаксации и запаздывания для случая мате-

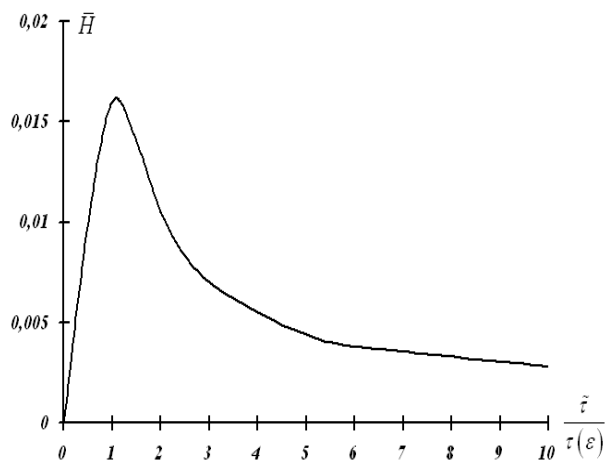


Рис. 3

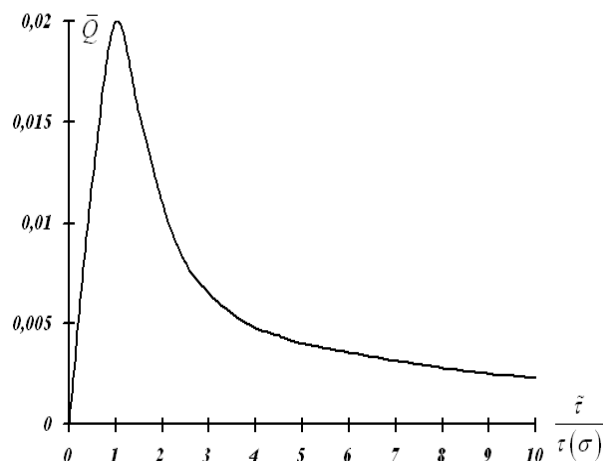


Рис. 4

Следует заметить, что в первом приближении спектры времен релаксации \bar{N}_1 и времен запаздывания \bar{Q}_1 представляют собой производные по логарифмическо-временной шкале от нормированных функций релаксации (5) и запаздывания (6) соответственно, то есть с учетом формул (3), (4), получаем

$$\bar{N}_1 = A_\varepsilon \varphi_{\varepsilon t} (1 - \varphi_{\varepsilon t}) \Big|_{t=\tilde{\tau}}, \quad (17)$$

$$\bar{Q}_1 = A_\sigma \varphi_{\sigma t} (1 - \varphi_{\sigma t}) \Big|_{t=\tilde{\tau}}. \quad (18)$$

Имея представление о форме спектров релаксации и запаздывания, можно интегрированием получить соответствующую нормированную функцию – основу математической модели вязкоупругих свойств.

Для последующих приближений спектров релаксации \bar{N}_k и запаздывания \bar{Q}_k была получена рекуррентная формула, а в ходе исследования было показано, что приближения спектров достаточно быстро сходятся к своим предельным значениям

математической модели (1), (2) определяется соответственно структурными коэффициентами A_ε и A_σ . Например, спектры релаксации и запаздывания крученной полиэфирной нити показаны на рис.3 – форма спектра времен релаксации крученной полиэфирной нити, $T=40^\circ\text{C}$ и рис. 4 – форма спектра времен запаздывания крученной полиэфирной нити, $T=40^\circ\text{C}$.

\bar{N} и \bar{Q} соответственно, что характеризует устойчивость выбранной математической модели вязкоупругости на основе гиперболического тангенса.

Показано, что формы спектров времен релаксации и времен запаздывания характеризуются параметрами интенсивности A_ε – для процесса релаксации и A_σ – для процесса ползучести.

Разработанные методики носят универсальный характер, они применимы не только для исследования деформационных свойств текстильных материалов, но и более широкого класса полимеров, например, материалов, применяемых в легкой промышленности и в других отраслях техники.

ВЫВОДЫ

1. Предлагается критерий оптимального выбора нормированной функции – основы математической модели вязкоупругих свойств полимерных материалов в зоне неразрушающих механических воздей-

ствий, позволяющей наиболее достоверно описывать деформационные процессы.

2. Разработаны методики определения вязкоупругих характеристик и расчетного прогнозирования кратковременных и длительных деформационных процессов полимерных материалов на основе математической модели с нормированной функцией гиперболический тангенс, оптимально учитывающие характер нелинейности процесса.

3. Предлагаются методики расчета упругой и вязкоупругопластической энергетической компоненты механической работы деформирования.

4. Разработаны методики учета необратимого псевдопластического компонента деформации, повышающие надежность прогнозирования сложных режимов деформирования полимерных материалов.

5. В рамках построенной математической модели деформационных свойств полимерных материалов на основе гиперболического тангенса разработаны методики определения спектров времен релаксации и запаздывания.

6. Разработанные методики определения вязкоупругих параметров-характеристик и прогнозирования деформационных процессов полимерных материалов позволяют решать задачи технологической направленности по отбору материалов, обладающих оптимальными характеристиками с точки зрения эксплуатационных свойств.

7. Применение разработанных методик прогнозирования нелинейно-наследственной вязкоупругости к большой группе полимерных материалов позволяет сделать вывод об универсальности построенной теории и разработанных методик, а также рекомендовать их использование в материаловедческих исследованиях для изучения вязкоупругих свойств широкого круга перспективных полимерных материалов технического назначения в различных отраслях народного хозяйства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сталевич А.М.* Деформирование ориентированных полимеров. – С.-Пб.: Изд-во СПГУТД, 2002.

2. *Демидов А.В.* Оптимизация методов спектрального моделирования деформационных процессов полимеров. – С.-Пб.: Изд-во СПГУТД, 2006.

3. *Макаров А.Г.* Прогнозирование деформационных процессов в текстильных материалах. – С.-Пб.: Изд-во СПГУТД, 2002.

4. *Макаров А.Г.* Математические методы анализа физико-механических свойств материалов легкой промышленности. – С.-Пб.: Изд-во СПГУТД, 2002.

5. *Демидов А.В.* Математическое моделирование механических свойств полимеров//Изв. Междунар. акад. наук высшей школы. – 2006, № 3 (37). С.200...205.

6. *Демидов А.В., Макаров А.Г.* Методы математического моделирования механических свойств полимеров. – С.-Пб.: Изд-во СПГУТД, 2007.

Рекомендована кафедрой математики. Поступила 25.12.06.