

УДК 687.021.531.36

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГИБКОЙ ЛЕНТЫ  
С ПОВЕРХНОСТЬЮ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА***Е.В. ПОЛЯКОВА***(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)**

Задачи о взаимодействии полосы ткани или другой гибкой ленты с поверхностью вращающегося цилиндра возникают при проектировании оборудования многих разнородных производств. Эти задачи, например, играют существенную роль при расчетах механизмов вытягивания полимерных пленок, производимых в химической промышленности, в вопросах манипулирования мягкими трубчатыми оболочками при упаковке пищевой продукции, при использовании тканей для производства композитных изделий.

До настоящего времени при изучении движения лент, взаимодействующих с вращающимися цилиндрами, не уделяется достаточного внимания тому, что, как правило, имеются существенные различия в напряженно-деформированных состояниях частиц ленты, находящихся на различных расстояниях от ее кромок. Одной из основных неустранимых причин этих различий является то, что на кромках ленты, в отличие от ее параллельных кромок внутренних сечений, отсутствуют нормальные напряжения. Это ведет к тому, что напряжения, нормальные к поперечным сечениям ленты, то есть растягивающие ленту напряжения, не распределены по этим сечениям равномерно. В результате продольные волокна ленты, находящиеся на различных расстояниях от ее кромок, оказываются растянутыми в различной степени, и эти различия обуславливают сложный характер распределения продольных и поперечных деформаций ленты.

Трудности в исследовании этих деформаций и напряжений особенно возрастают, если среди сил взаимодействия ленты с поверхностью цилиндра имеются силы сухого трения.

В настоящей работе даются общие уравнения для определения напряженно-деформированных состояний лент в соответствии с произвольными условиями их взаимодействия с цилиндрами. Однако многообразие этих условий и сложный характер указанных уравнений затрудняют разработку общих методов изучения и расчета конкретных примеров. Поэтому ограничимся одним только примером, а именно рассмотрим применение общих уравнений к исследованию работы типичных, устанавливаемых на ткацких станках механизмов отвода ткани.

Всегда нежелательная неоднородность создаваемых тканей особенно заметна при сравнении текстильных структур их кромок и удаленных от кромок частей. Можно отметить, что при производстве тканей "дряблые, зубцевидные, неравномерные, волнистые" [1] и обладающие другими недостатками кромки тканей, обусловили появление многих теоретических и конструктивных разработок [2]...[5], которые, однако, не дали вполне удовлетворительных результатов.

Ниже будем предполагать, что толщиной и изгибной жесткостью ткани, а также ее инертностью можно пренебречь. Уравнения квазистатического равновесия ткани запишем в виде [6], [7]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \bar{\sigma}_1 \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right| \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \bar{\sigma}_2 \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \right| \right) + \bar{q} \sqrt{EG - F^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\bar{r}$  – радиус-вектор произвольной частицы ткани;  $\xi$  и  $\eta$  – лагранжевы координаты этой частицы;

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{e}_1 \sigma_{11} + \bar{e}_2 \sigma_{12}, \quad \bar{\sigma}_2 = \bar{e}_1 \sigma_{21} + \bar{e}_2 \sigma_{22}, \quad (2)$$

$\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  – определяемые равенствами

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} / \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \right|, \quad \bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} / \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right| \quad (3)$$

орты, касательные к координатным линиям  $\eta = \text{const}$  и  $\xi = \text{const}$  соответственно;  $\bar{\sigma}_1$  и  $\bar{\sigma}_2$  – напряжения в сечениях ткани, проходящих по вышеуказанным координатным линиям;  $\bar{q}$  – внешняя распределенная нагрузка, действующая на ткань;  $E$ ,  $G$  и  $F$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, образуемой тканью.

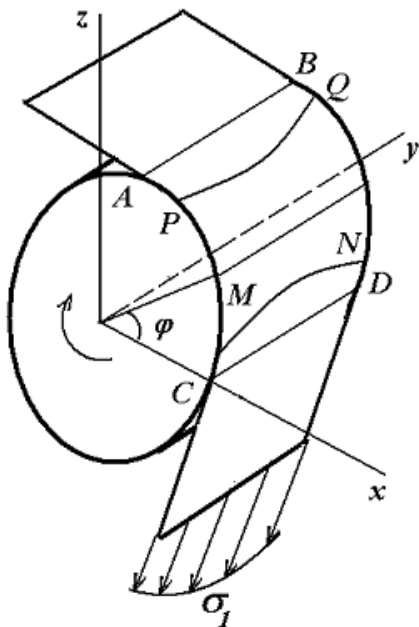


Рис. 1

Схема взаимодействия вальяна с отводимым полотном показана на рис.1. Контакт идущей с грудицы ткани с вальяном

начинается на отрезке АВ и заканчивается на отрезке CD. Шероховатость поверхности вальяна и значительная величина угла его охвата тканью надежно обеспечивают его транспортирующую способность. Однако всегда существуют полосы поверхности вальяна, на которых скольжение не может быть исключено полностью при любом увеличении шероховатости этой поверхности. Указанное скольжение обусловлено различиями напряжений в части PQMN ткани, лежащей на поверхности вальяна без скольжения, и в частях, образующих приходящую и уходящую ветви ткани. В приходящей ветви ткани напряжения периодически меняются при приближении уточных нитей и при зевобразовании. Напряжения ткани в уходящей ветви обычно меньше, чем ее напряжения на поверхности вальяна, и медленно изменяются по мере увеличения диаметра навиваемого рулона. Хотя ширина указанных полосок скольжения АВPQ и CDMN незначительна, именно происходящие в этих полосках деформации ткани в значительной мере определяют характер возможных недостатков самой ткани и образуемых рулонов.

Полное исследование движения ткани требует построения решений общих уравнений для приходящей и уходящей ветвей, а также в областях АВPQ, CDMN и PQMN, которые должны быть согласованы на границах указанных ветвей и областей. Для демонстрации предлагаемого метода исследования достаточно рассмотреть движение ткани в полоске CDMN при произвольных граничных условиях.

Представим радиус-вектор произвольной частицы ткани в виде

$$\bar{r} = R \cos \varphi(\xi, \eta) \bar{i} + y(\xi, \eta) \bar{j} + R \sin \varphi(\xi, \eta) \bar{k}, \quad (4)$$

где  $R$  – радиус вальяна;  $\varphi$  – угловая координата частицы ткани, отсчитываемая от плоскости  $xy$ .

Далее будем считать, что координатные линии  $\eta = \text{const}$  и  $\xi = \text{const}$  идут соответственно поперек и вдоль ткани; причем величины  $\eta$  и  $\xi$  совпадают с дуговыми координатами, вычисляемыми вдоль указанных линий, при недеформированном состоянии ткани.

Из (4) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \xi} &= -R \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{j} + R \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \bar{k}, \\ \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \eta} &= -R \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{j} + R \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \bar{k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Справедливы равенства

$$\varphi = \frac{\xi}{R} + \frac{\lambda(\xi, \eta)}{R}, \quad y = \eta + \delta(\xi, \eta), \quad (6)$$

где  $\lambda(\xi, \eta)$  и  $\delta(\xi, \eta)$  – продольные и поперечные смещения частиц ткани, обусловленные ее деформацией. Для определения этих смещений к уравнениям (1)...(6) нужно добавить определяющие (конститутивные) уравнения ткани.

Ограничимся сравнительно простым случаем, когда ткань имеет сравнительно малую плотность по основе и по утку, и можно пренебречь силами, препятствующими относительным сдвигам нитей основы, то есть можно положить  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$ . Будем также считать, что

$$\sigma_{11} = E_1 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad \sigma_{22} = E_2 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta)}{\partial \eta}. \quad (7)$$

$$\lambda(\xi, \eta) = C_1(\eta) e^{\frac{f \xi}{R}} + C_2(\eta), \quad \sigma_{11} = E_1 C_1(\eta) \frac{f}{R} e^{\frac{f \xi}{R}},$$

$$F_y = E_2 \left( C_1'(\eta) e^{\frac{f \xi}{R}} + C_2'(\eta) \right),$$

где  $C_1(\eta)$  и  $C_2(\eta)$  – функции, подлежащие определению из условий сопряжения состояния ткани в области CDMN с ее состояниями в смежных областях.

Пренебрегая в (6) малыми величинами, можем записать

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \xi} = R \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \bar{\tau}, \quad \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \eta} = R \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \bar{\tau}, \quad (8)$$

$$\bar{\tau} = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{k}.$$

Продолжая пренебрегать малыми порядками выше первого, получим

$$\left| \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \xi} \right| = 1, \quad \left| \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \eta} \right| = 1, \quad \bar{e}_1 = \bar{\tau}, \quad \bar{e}_2 = \bar{j}. \quad (9)$$

Пользуясь (8) и (9), перепишем (1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\tau} \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{j} \sigma_{22}) - \bar{n} N - \bar{\tau} F_{\text{тр}} - \bar{j} F_y = 0, \quad (10)$$

где  $\bar{n} = R^{-1} \partial \bar{\tau} / \partial \xi$  – орт внутренней нормали к поверхности вальяна;  $N$  и  $F_y$  – соответственно нормальная и параллельная оси  $y$  реакции этой поверхности;  $F_{\text{тр}} = fN$  – сила трения, препятствующая продольному скольжению волокон.

Из (10) получим

$$\frac{\sigma_{11}}{R} = N, \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} = F_{\text{тр}}, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} = F_y. \quad (11)$$

Учитывая равенства (7), из (11) будем иметь

Допустим, что линия MN имеет уравнение  $\xi = s(\eta)$ . На этой линии смещения равны нулю, то есть выполняется равенство

$$0 = C_1(\eta)e^{\frac{f}{R}s(\eta)} + C_2(\eta). \quad (13)$$

Напряжения в области PQMN и в ушедшей ветви ткани обозначим через  $\sigma_{11}^{BX}(\xi, \eta)$  и  $\sigma_{11}^{BIX}(\xi, \eta)$  соответственно. Условия согласования напряжений на линиях MN и CD принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{BX}(s(\eta), \eta) &= E_1 C_1(\eta) \frac{f}{R} e^{\frac{f}{R}s(\eta)}, \\ \sigma_{11}^{BIX}(0, \eta) &= E_1 C_1(\eta) \frac{f}{R}. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) легко решаются относительно  $C_1(\eta)$ ,  $C_2(\eta)$  и  $s(\eta)$ . Аналогичным образом может быть исследовано напряженно-деформированное состояние в других областях, от зоны прибивания утка до товарного валика.

## ВЫВОДЫ

1. Получены общие уравнения для определения напряженно-деформированного состояния ленты, скользящей по поверхности вращающегося цилиндра.

2. Проведен анализ движения ткани в области ее ухода с поверхности вальяна товарного механизма ткацкого станка. Рассчитаны возникающие в этой области напряжения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гордеев В.А., Волков П.В. Ткачество. – М.: Гизлегпром, 1958.
2. Бородин В.А., Оников Э.А., Колобанов Н.И., Ангарова Е.Р. Кромкообразующие механизмы ткацких станков. – М.: ЦНИИТЭИЛегпром, 1972.
3. Кузовкин К.С., Данилов В.В., Курочкин В.Н., Мороков М.И., Битунов Е.И., Акимов Т.С. Опыт работы на ткацких станках СТБ. – М.: Легкая индустрия, 1968.
4. Монастырский Д.Ш. Механика процессов сборки резинотканевых конвейерных лент. – Л.: ЛГУ, 1989.
5. Никитин М.Н. Автоматический ткацкий станок АТ-175Ш. – М.: Легкая индустрия, 1968.
6. Полякова Е.В., Чайкин В.А. Прикладные задачи механики мягких оболочек и тканей. – СПб.: СПГУТД, 2006.
7. Чайкин В.А., Полякова Е.В. Основы механики мягких оболочек и тканей. – СПб.: СПГУТД, 2004.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 25.12.06.