

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СПЕКТРА ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛОВ ДВУХВАЛКОВОГО МОДУЛЯ

В.А. МАРТЫШЕНКО, А.В. ПОДЪЯЧЕВ, Р.В. ЗАЙЦЕВ

(Костромской государственной технологической университет)

Предложенный ранее [1] аналитический метод определения собственных частот свободных колебаний двухвалкового модуля не позволяет определить весь спектр частот и формы свободных колебаний двухвалкового модуля.

Предлагаемый нами метод позволяет получить весь спектр частот, а также их форму по всей длине вала.

Для решения поставленной задачи весь модуль разбивается на участки постоянной жесткости и выполняется статический расчет конструкции с целью определения коэффициентов упругости основания на контактирующих участках валов.

Свободные колебания простого элемента рассмотрены ранее [2].

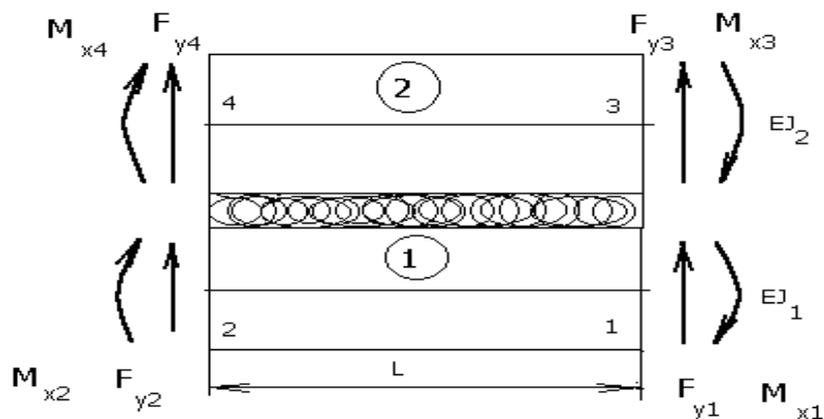


Рис. 1

Свободные колебания парного сэндвич-элемента (рис. 1) предлагается описывать

системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} EI_1 \partial^4 V_1 / \partial z^4 + \chi(V_1 - V_2) + m_1 \partial^2 V_1 / \partial t^2 = 0, \\ EI_2 \partial^4 V_2 / \partial z^4 + \chi(V_2 - V_1) + m_2 \partial^2 V_2 / \partial t^2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где EI_1, EI_2 – изгибные жесткости элемента нижнего и верхнего валов; m_1, m_2 – погонные массы валов; χ – коэффициент упругости основания; $V_1 = V_1(z, t), V_2 = V_2(z, t)$ – функции прогибов валов.

Разделяя переменные по методу Фурье:

$$\begin{aligned} V_1(z, t) &= v_1(z)T(t), \\ V_2(z, t) &= v_2(z)T(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $v_1(z), v_2(z)$ – узловые перемещения парных элементов для нижнего и верхнего вала соответственно; функция $T(t)$ удовлетворяет уравнению, описывающему гар-

монические колебания

$$d^2T/dt^2 + \omega^2 T = 0, \quad (3)$$

где ω – частота собственных колебаний системы валов.

Приводим систему уравнений (1) к виду:

$$\begin{cases} EI_1 d^4 v_1 / dz^4 + \chi(v_1 - v_2) - m_1 v_1 \omega^2 = 0, \\ EI_2 d^4 v_2 / dz^4 + \chi(v_2 - v_1) - m_2 v_2 \omega^2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для численного решения поставленной задачи представим функции v_1, v_2 в виде рядов [3]:

$$v_1 = \sum \omega^{2(i-1)} v_{1(i-1)}, v_2 = \sum \omega^{2(i-1)} v_{2(i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Подставим (5) в (4):

$$\begin{cases} EI_1 \sum \omega^{2(i-1)} d^4 v_{1(i-1)} / dz^4 + \chi(\sum \omega^{2(i-1)} v_{1(i-1)} - \sum \omega^{2(i-1)} v_{2(i-1)}) - m_1 \omega^2 \sum \omega^{2(i-1)} v_{1(i-1)} = 0, \\ EI_2 \sum \omega^{2(i-1)} d^4 v_{2(i-1)} / dz^4 + \chi(\sum \omega^{2(i-1)} v_{2(i-1)} - \sum \omega^{2(i-1)} v_{1(i-1)}) - m_2 \omega^2 \sum \omega^{2(i-1)} v_{2(i-1)} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Чтобы уравнения (6) тождественно выполнялись при любых значениях ω , необходимо сгруппировать все слагаемые, имеющие одинаковые множители $\omega^{2(i-1)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) и приравнять их к нулю.

Так, при удержании двух членов разложения (5) получаем систему четырех линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} EI_1 d^4 v_{10} / dz^4 + \chi(v_{10} - v_{20}) = 0, \\ EI_1 d^4 v_{20} / dz^4 + \chi(v_{20} - v_{10}) = 0, \\ EI_2 d^4 v_{11} / dz^4 + \chi(v_{11} - v_{21}) - m_2 v_{10} = 0, \\ EI_2 d^4 v_{21} / dz^4 + \chi(v_{21} - v_{11}) - m_2 v_{20} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Первые два уравнения (7) образуют независимую систему уравнений, для которых строится общее решение. Третье и четвертое уравнения (7) образуют систему неоднородных дифференциальных уравнений относительно функций v_{11} и v_{21} , в

которой функции v_{10} и v_{20} являются возмущающими членами. Для этой системы уравнений необходимо построить частное решение неоднородных дифференциальных уравнений, которое зависит от вида частных решений однородной системы первого и второго дифференциальных уравнений (7).

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= V_{10}/\ell_0; & X_{2i} &= dX_{2i-1}/d\zeta; & X_{2i+3} &= dX_{2i+4}/d\zeta; & X_{2i+4} &= I_i/I_0 dX_{2i}/d\zeta; \\ X_{2i+7} &= V_{20}/\ell_0; & X_{2i+8} &= dX_{2i+7}/d\zeta; & X_{2i+11} &= dX_{2i+12}/d\zeta; & X_{2i+12} &= I_i/I_0 dX_{2i+8}/d\zeta, \end{aligned} \quad (8)$$

(i=1,2)

где I_0, ℓ_0 – нормирующие множители.

Уравнения (7) и (8) образуют систему шестнадцати дифференциальных уравнений первого порядка:

$$dX/d\zeta = AX, \quad (9)$$

где $X = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}]^T$ – вектор кинематических и статических начальных параметров.

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & 0 \\ \hline A_2 & A_1 \\ \hline \end{array} \quad (10)$$

Здесь A_1 – блочная матрица восьмого порядка, совпадающая с матрицей связи уравнения состояния статического равновесия сэндвич-элемента двухвалкового модуля; 0 – нулевая квадратная матрица восьмого порядка; A_2 – квадратная матрица восьмого порядка, содержащая только два ненулевых элемента $A_2(5,1) = m_1/m_0$ и $A_2(7,3) = m_2/m_0$; m_0 – нормирующий множитель.

Искомый параметр частоты колебаний

$$\begin{array}{|c|c|} \hline V_2 \\ \hline P_2 \\ \hline \end{array} = \left[\begin{array}{|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline \end{array} \right] \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline V_1 \\ \hline P_1 \\ \hline \end{array} \quad (11)$$

где A – матрица восьмого порядка, расположенная в левом верхнем углу, а B – матрица восьмого порядка, расположенная в левом нижнем углу матрицы (16x16), полученной после интегрирования системы уравнений.

Краевые кинематические и статические условия представлены в [1].

Введем новые безразмерные переменные, связанные с функциями V_{10} и V_{20} и их производными соотношениями:

валкового модуля выражен в этом случае через нормирующие множители $k = \omega^2 m_0 \ell_0^4 / (E_0 I_0)$.

Систему шестнадцати однородных дифференциальных уравнений первого порядка (9) интегрируем последовательно восемь раз при различных начальных краевых условиях. Первое интегрирование выполняем при начальном векторе $X = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ и восьмой раз – $X = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$.

Решение задачи Коши при начальном векторе, содержащем лишь одну ненулевую компоненту, приводит к нахождению в численном виде одного частного решения однородной системы дифференциальных уравнений на другом конце интервала интегрирования.

Проинтегрировав систему уравнений восемь раз, получаем восемь линейно независимых частных решений на другом конце интервала интегрирования, которые связаны с начальными параметрами уравнением:

Представим систему (11) в виде системы двух матричных уравнений:

$$\begin{cases} V_2 = (A_{11} + kB_{11})V_1 + (A_{12} + kB_{12})P_1, \\ P_2 = (A_{21} + kB_{21})V_1 + (A_{22} + kB_{22})P_1. \end{cases} \quad (12)$$

Преобразуем уравнение (12) с целью получения уравнения состояния колебаний двухвалкового модуля. Для этого разрешим первое уравнение системы (12) отно-

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} + K \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Так как исходная система дифференциальных уравнений решается с точностью до ω^2 или k , то и уравнение состояния имеет смысл получать с той же степенью точности.

После получения матриц уравнения (13) необходимо в матрицах последовательно изменить знаки элементов столбцов $2i$ и строк $4+i$ ($i=1, 2, 3, 4$).

Уравнение (13) представляет собой известную алгебраическую задачу о нахождении собственных значений и векторов матричного уравнения типа $\|F - \lambda E\| = 0$, где $F=CD^{-1}$. Собственными числами являются нормирующие множители k , а соот-

ветственно P_1 и подставим во второе уравнение (12). Объединяя в одно матричное уравнение, получаем уравнение состояния свободных колебаний :

ветствующие им собственные векторы определяют формы свободных колебаний двухвалкового модуля.

Предложенный алгоритм реализован в среде Delphi. Динамические исследования проведены на математической модели валкового модуля отжимной машины О-180 (рис. 2). Для проведения расчетов были наложены следующие условия закрепления: опорные сечения нижнего вала не имеют линейных перемещений, а сечения верхнего вала, в которых приложены силы, могут перемещаться в вертикальном направлении.

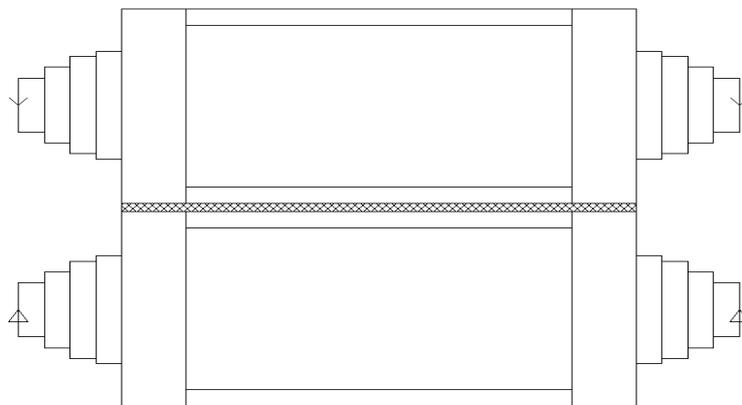


Рис. 2

Для данной пары валов был получен весь спектр частот свободных колебаний (1-я частота – 1724 об/мин, 2-я частота - 2025 об/мин и т.д.). Полученные результаты хорошо согласуются с аналогичными

расчетами, выполненными аналитически методом сканирования [1].

На рис. 3 представлены графики форм первых двух частот свободных колебаний парных сэндвич-элементов двухвалкового модуля О-180.

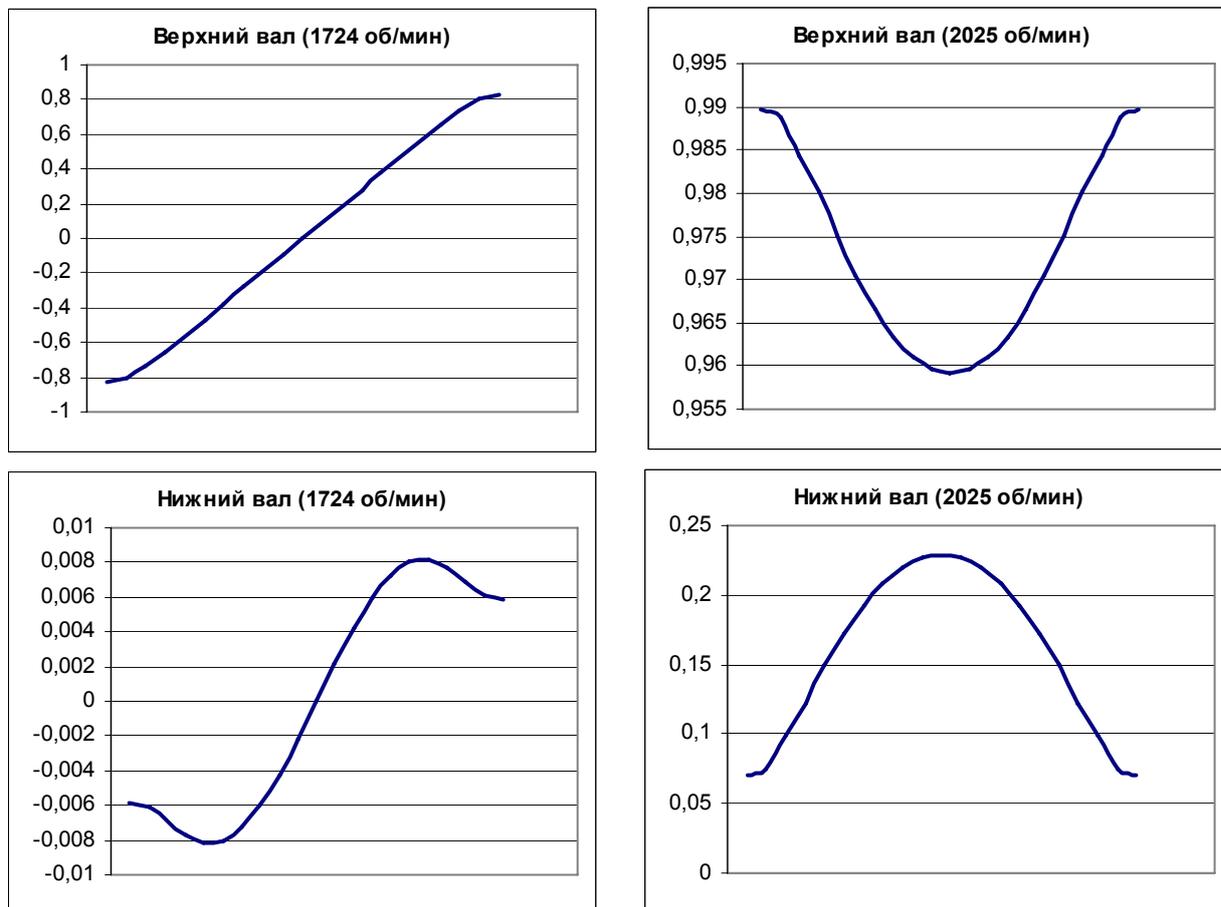


Рис. 3

ВЫВОДЫ

1. Впервые разработан и реализован алгоритм автоматизированного численного расчета спектра частот и форм свободных колебаний валов двухвалкового модуля (колебания стержня на упругом основании, находящемся на упругом стержне).

2. С помощью созданного программного обеспечения показано влияние эластичного покрытия валов на формы свободных колебаний рубашек валов двухвалкового модуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартышенко В.А., Подъячев А.В. Свободные колебания валов двухвалковых механизмов текстильного отделочного оборудования // Межвуз. сб. научн. тр. Ленинградского института текстильной и легкой промышленности. – Л., 1987.

2. Мартышенко В.А. Уравнения состояния изгиба, устойчивости и поперечных колебаний стержня // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1981, №9. С.43...47.

3. Мартышенко В.А. К автоматизированному расчету вынужденных изгибных колебаний двухвалковых модулей текстильного отделочного оборудования // Вестник КГТУ №13, 2006.

Рекомендована кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов. Поступила 16.06.07.