

ГЕОМЕТРИЯ СКРУЧЕННОЙ В ДВА СЛОЖЕНИЯ ПРЯЖИ В РАСЧЕТАХ ИЗМЕНЕНИЯ ДЛИНЫ ПРИ КРУЧЕНИИ

GEOMETRY OF THE YARN BRAIDED IN TWO ADDITIONS IN CALCULATIONS OF CHANGE OF LENGTH AT TORSION

В.П. ЩЕРБАКОВ, А.В. ГРАЧЕВ, Н.С. СКУЛАНОВА, Т.И. ПОЛЯКОВА, С.Л. ХАЛЕЗОВ
V.P. SCHERBAKOV, A.V. GRACHEV, N.S. SKULANOVA, T.I. POLJAKOVA, S.L. KHALEZOV

(Московский государственный университет дизайна и технологии)
(Moscow State University of Design and Technology)
E-mail: victor.scherbackov2012@yandex.ru

Приведена геометрическая модель крученого продукта – нити, ровницы, пряжи в форме полых прямых круговых цилиндров, в которых волокна расположены по винтовым линиям с постоянным шагом. Проведен расчет изменения длины одиночной нити в процессе кручения. Дан расчет длины нити после вторичного кручения с учетом формы волокна в виде двойной винтовой линии. Показано существенное увеличение линейной плотности продукта при кручении.

The geometrical model of a twisted product – a thread, roves, a yarn in the form of hollow direct circular cylinders in which fibers are located on screw lines with a constant step is given. Calculation of change of length of a single thread in the course of torsion is carried out. It is dismissed thread lengths after secondary torsion taking into account a fiber form in the form of the double screw line. The essential increase in linear density of a product at torsion is shown.

Ключевые слова: нить, пряжа, линейная плотность, кручение, винтовая линия.

Keywords: string, yarn, linear density, torsion, screw line.

При кручении нити, ровницы, пряжи геометрическую модель крученого продукта можно представить в форме полых прямых круговых цилиндров радиуса r , в которых волокна расположены по винтовым линиям с постоянным шагом h (рис. 1) [1], [4], [5].

Шаг винтовой линии не зависит от текущего радиуса нити и определяется круткой нити $K_1 = 1/h$. Угол подъема винтовой линии, то есть угол между касательной к винтовой линии и образующей цилиндра, равен ϑ . В одиночной нити радиуса R угол подъема внешнего волокна равен β . Из рис. 1 следует:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2\pi r}{h},$$

или

$$\operatorname{tg} \vartheta = 2\pi r K_1.$$

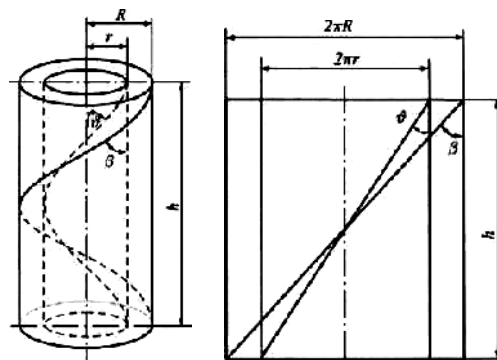


Рис. 1

Длина волокна дается формулой:

$$s = \sqrt{h^2 + (2\pi r)^2} = \sqrt{1 + (2\pi r K_1)^2} h. \quad (1)$$

Длина крученого продукта меньше нескрученного, и в прядении приняты различные показатели скрученности нити, характеризующие изменение длины при кру-

чении: укрутка нити u , коэффициент укрутки k_y , усадка при скручивании y [2]. Уравнения наматывания для ровничных, прядильных и крутильных машин, машин для производства химических волокон, так же как и мотальные механизмы этих машин, построены с учетом k_y . Знание величины укрутки нужно для точного расчета производительности прядильных и крутильных машин, так как эти расчеты делаются обычно по длине мычки или длине нескрученной нити. Кроме того, примем во внимание и увеличение при кручении основной характеристики в текстильной технологии – линейной плотности. Ниже будет показано, что при скручивании аппаратной шерстяной пряжи линейной плотности 124,5 текс в два сложения толщина пряжи становится равной не $124,5 \times 2$ текс, как обычно и принимается, а 273 текс, то есть увеличивается на 24 текс по сравнению с обыкновенным 249 текс. Как одиночная, так и скрученная нить используются для изготовления ткани, трикотажа или других текстильных материалов. Одним из основных параметров при проектировании любого волокнистого материала является линейная плотность нити, образующей этот материал. Геометрические, механические, физические и другие свойства нитей и полотен во многом определяются линейной плотностью. Изготовление пряжи в любой системе прядения определяется планом прядения, в котором вычисляются параметры полуфабрикатов, в том числе и линейная плотность. И если на последнем переходе указывается величина вытяжки E на прядильной машине, то при отношении $T_{\text{ровницы}}/E$ получаем линейную плотность не пряжи, а волокнистой ленточки, выходящей из вытяжного прибора. Уже при кручении и последующем наматывании линейная плотность увеличивается. В полной мере это может быть отнесено к пневмопрядению.

В области структуры нити, скрученной в несколько сложений, по широте охвата материала и по глубине анализа важнейшее место занимают работы L.R.G. Treloar, где наряду с теорией содержатся конкретные экспериментальные данные. Одна из

его работ [3] положена в основу нашего моделирования структуры скрученной в два сложения нити [4], [5]. Основные положения, уравнения и формулы теории L.R.G. Treloar приведены в полном обзоре и анализе работ в области кручения А.В. Матукониса [6]. Задача расчета длины скрученной в несколько сложений нити с использованием метода усреднения является непростой. Во многих случаях решение оказывается неверным. Предлагаемая статья не претендует на полноту освещения всей теории расчета крученого продукта, изложенной в [3...5], и обращает внимание на основные положения теории и формулы, позволяющие застраховаться от возможных ошибок.

Напомним основные понятия из теории кручения в сопротивлении материалов. Рассмотрим упругую нить с круговым поперечным сечением, нагруженную по торцам двумя моментами [7]. Двумя поперечными сечениями выделим из нити элемент длиной dz , а из него двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $(r+dr)$ – элементарное кольцо, показанное на рис. 2 (кручение элемента нити).

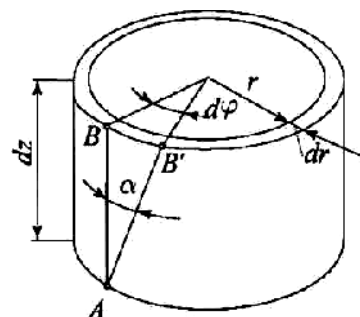
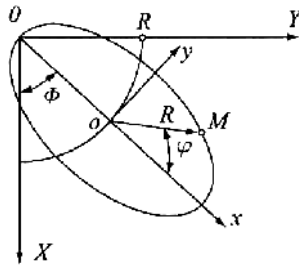


Рис.2

Верхнее торцевое сечение поворачивается при кручении относительно левого на угол $d\varphi$. Образующая цилиндра AB поворачивается при этом на угол α и занимает положение AB' . Перемещение $BB' du = r d\varphi$, и в то же время $du = dz \tan \alpha$. Следовательно, $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tan \alpha}{r}$. Отношение $\frac{d\varphi}{dz} = \theta$ называется относительным углом закручивания и представляет собой угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними (угол θ соответствует от-

носителю удлинению $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ при растяжении). Тогда получаем $\theta_1 = \frac{d\varphi}{dz} = 2\pi K_1$.

При скручивании двух и более нитей ось каждой из них превращается в пространственную кривую. Мерой отклонения кривой от плоской формы является первая компонента Ω вектора Дарбу, называемая кручением кривой, или второй кривизной. Если скручиваются две нити одинакового диаметра $2R$, то ось любой нити расположена на воображаемом цилиндре диаметра $2R$ по винтовой линии с углом подъема α . Кручение этой линии равно $\Omega = \frac{1}{R} \frac{\sin 2\alpha}{2}$. Угол α определяется формулой

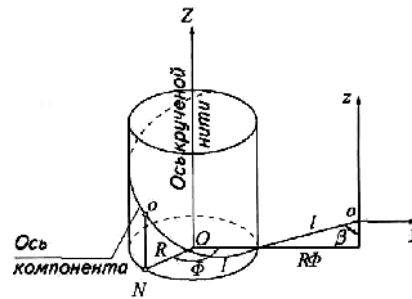


а)

$\operatorname{tg} \alpha = 2\pi R K_2$, где K_2 – вторичная кривая. Относительный угол закручивания двух сечений, расположенных на расстоянии $d\ell$ друг от друга, определяется формулой $\theta_1 = \frac{d\varphi}{d\ell}$, а суммарный угол переписывается

в форме $\theta = \frac{d\varphi}{d\ell} + \Omega$.

Форма кривой волокна образована вращением вектора r , движущегося с постоянной скоростью вдоль винтовой оси одиночной нити, и представляет собой винтовую линию, расположенную на другой винтовой линии.



б)

Рис. 3

Введем системы координат (рис. 3: системы координат, связанные со скрученной нитью):

1) систему координат скрученной нити OXYZ так, чтобы ось OZ была направлена вдоль оси нити;

2) систему координат одиночной нити oxuz таким образом, чтобы начало координат o располагалось на оси нити, а ось oz была параллельна оси OZ.

Учтем свойство винтовой линии: главная нормаль к винтовой линии во всех ее точках совпадает с нормалью к цилиндру. Теперь угловое положение точки волокна M можно определить углом φ , а угловое положение оси нити – углом Φ (рис. 3-б). Введем дополнительный параметр p : $\varphi = p\Phi$. Параметр p определяется относи-

тельным углом закручивания одиночной нити и структурой крученной нити:

$$p = \frac{d\varphi}{d\Phi} = \frac{d\varphi}{d\ell} \frac{d\ell}{d\Phi} = \frac{d\varphi}{d\ell} \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Уравнения двойной винтовой линии имеют вид:

$$\begin{aligned} X &= R \cos\left(\frac{\varphi}{p}\right) + r \cos \varphi \cos\left(\frac{\varphi}{p}\right) - r \cos \alpha \sin \varphi \sin\left(\frac{\varphi}{p}\right), \\ Y &= R \sin\left(\frac{\varphi}{p}\right) + r \cos \alpha \sin \varphi \cos\left(\frac{\varphi}{p}\right) + r \cos \varphi \sin\left(\frac{\varphi}{p}\right), \\ Z &= R \left(\frac{\varphi}{p}\right) \operatorname{ctg} \alpha - r \sin \alpha \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Длина волокна в скрученной нити находится интегрированием:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi. \quad (3)$$

Найдем теперь длину волокна:

$$s = \sqrt{A} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 + B \cos \varphi + C \cos^2 \varphi} d\varphi, \quad (4)$$

где введены обозначения

$$A = \frac{1}{p^2} \left[\frac{R^2}{\sin^2 \alpha} + r^2 (p + \cos \alpha)^2 \right], \quad B = \frac{2Rr}{A}, \quad C = \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{A}.$$

Интеграл не имеет точного решения, но в пределах от 0 до π для всех практических констант B и C действительно следующее приближение [3]:

$$I = \int_0^\pi \sqrt{1 + B \cos \varphi + C \cos^2 \varphi} d\varphi \approx \pi.$$

Например, численное интегрирование в случае расчета шерстяной гребенной пряжи линейной плотности 31×2 текс дает $I = 3,131 \approx \pi$. Уравнение (4) с учетом этого приближенного выражения позволяет определить длину волокна:

$$s = \frac{\varphi}{p} \sqrt{\frac{R^2}{\sin^2 \alpha} + r^2 (p + \cos \alpha)^2}. \quad (5)$$

Если до скручивания длина оси между двумя фиксированными точками равна ℓ_1 , а после скручивания – ℓ_2 , то можно написать:

$$K_1 \ell_1 = \frac{\ell_2}{2\pi} \frac{d\varphi}{d\ell},$$

или

$$\frac{d\varphi}{d\ell} = 2\pi K_1 \frac{\ell_1}{\ell_2} = \theta_1 \frac{\ell_1}{\ell_2}. \quad (6)$$

Отношение $\frac{d\varphi}{d\ell}$ определяется деформационным кручением компонента. Абсолютное же закручивание с учетом второй кривизны Ω записывается в форме

$$\theta = 2\pi K_1 \frac{\ell_1}{\ell} + \frac{1}{R} \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (7)$$

Эта формула показывает, что кручение одиночной нити в составе скрученной обусловливается начальным закручиванием

нити и расположением ее оси по винтовой линии. При этом учтено изменение длины оси компонента при скручивании.

Проведем расчет изменения длины одиночной нити в процессе кручения. Осевая составляющая длины волокна, расположенного на расстоянии r от центра, отнесенная к длине самого волокна, определяется из выражения (1):

$$\frac{h}{s_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi r K_1)^2}}.$$

Учтем, что $\theta_1 = 2\pi K_1$ и обозначим

$\frac{h}{s_r} = \lambda_{1r}$, тогда предыдущее соотношение

запишем в форме:

$$\lambda_{1r} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \theta_1^2}}. \quad (8)$$

Разделим нить на цилиндрические элементы радиальной толщины dr и площадью $2\pi r dr$. Если m – число волокон, приходящихся на единицу площади сечения нити, то усреднение получаем из выражения

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi m R^2} \int_0^R \frac{2\pi m r}{\sqrt{1 + r^2 \theta_1^2}} dr = \frac{2}{R^2 \theta_1^2} \left(\sqrt{1 + R^2 \theta_1^2} - 1 \right). \quad (9)$$

Напомним, что λ_1 представляет собой усредненное отношение $\frac{h}{s_r}$, которое в случае некрученой нити должно быть равно единице. Перепишем (9) в форме

$$\lambda_1 = 2 \frac{\sqrt{1 + (2\pi R K_1)^2} - 1}{(2\pi R K_1)^2}.$$

При $K_1 = 0$ имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Раскроем ее по правилу Лопиталья [2], [3]. Предел

$$\lim_{K_1 \rightarrow 0} 2 \frac{\sqrt{1+(2\pi RK_1)^2} - 1}{(2\pi RK_1)^2} = \lim_{K_1 \rightarrow 0} \frac{2 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + (2\pi RK_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} 2(2\pi RK_1) 2\pi R \right\}}{2(2\pi RK_1) 2\pi R} = 1.$$

Расчет длины нити после вторичного кручения аналогичен расчету для одиночной нити, но с учетом формы волокна в виде двойной винтовой линии. Обозначим постоянную величину $R\theta_1\lambda_1=c$ и напишем квадратное уравнение [3...5]:

$$\lambda_2 = \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \left[- \left(2 + \frac{c}{2} \sin 2\alpha \right) \pm 2 \sqrt{1 + \frac{\sin^2 2\alpha}{4} + \frac{c}{2} \sin 2\alpha} \right]. \quad (10)$$

Приведем расчет изменения длины шерстяной аппаратной пряжи линейной плотности 124,5 текс с круткой 290 кручений на метр, скрученной в два сложения при вторичной крутке 200 кр/м. При плотности пряжи 0,5 г/см³ диаметр пряжи $d = 0,563$ мм, радиус $R = 0,282$ мм. Относительный угол закручивания $\theta = 2\pi K_1 = 1,822$ рад.

Длина одиночной пряжи, отнесенная к длине нескрученного продукта:

$$\lambda_1 = \frac{2}{R^2 \theta_1^2} \left(\sqrt{1 + R^2 \theta_1^2} - 1 \right) = 0,942.$$

$$R^2 \Omega^2 \lambda_2^2 + 2\lambda_2 (R\Omega c + 2) + c^2 - 4 = 0,$$

решение которого имеет вид:

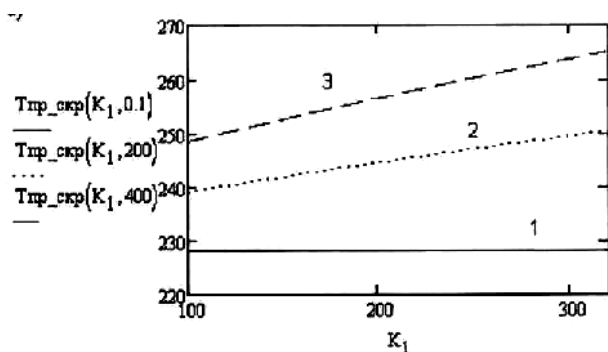
Угол подъема оси одиночной нити на воображаемом цилиндре радиуса R :

$$\alpha = \arctg(2\pi RK_2) = 0,34 \text{ рад.}$$

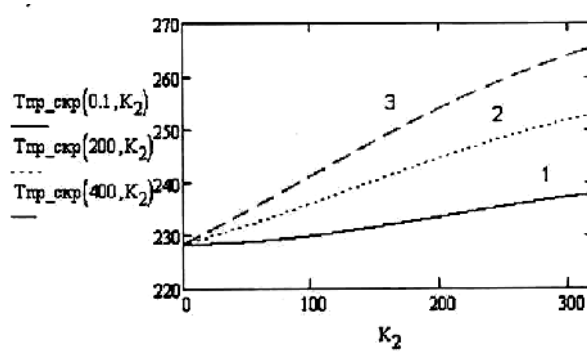
Постоянная c , входящая в формулу расчета λ_2 :

$$c = R\theta_1\lambda_1 = 0,483.$$

Окончательно относительная длина скрученной в два сложения пряжи вычисляется по формуле (10) при знаке "+": $\lambda_2 = 0,858$.



а)



б)

Рис. 4

На рис. 4 даны графики зависимости линейной плотности скрученной нити от первичной (а) и вторичной (б) крутки.

Вычисления показывают, что при изготовлении скрученной пряжи 124,5×2 текс из одиночной 124,5 текс с вторичной круткой 200 кручений на метр линейная плот-

ность скрученного продукта становится равной не $124,5 \times 2 = 249$ текс, как обычно считается, а 273,2 текс. Поэтому, чтобы получить заданную толщину 249 текс, скрученную пряжу следует вырабатывать из одиночной 114,15 текс. В свою очередь, для изготовления этой одиночной пряжи

нужна волокнистая ленточка 108 текс. Что касается одиночной пряжи 124,5 текс как готового продукта, то для ее формирования должна быть волокнистая ленточка 117,2 текс.

Таким образом, на прядильных машинах вытяжка Е должна быть установлена не как отношение линейных плотностей питающего полуфабриката (ровницы или ленты) и пряжи, а корректироваться на толщину некрученого волокнистого материала, выходящего из вытяжного прибора, то есть волокнистой ленточки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S.* Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.
2. *Кукин Г.Н., Соловьев А.Н.* Текстильное материаловедение. – Часть 2. – М.: Легкая индустрия, 1964.
3. *Treloar L.R.G.* // J. Text. Inst. Trans. – 47, T.348. №8, 1956.
4. *Щербаков В.П., Скуланова Н.С.* Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008.
5. *Щербаков В.П.* Прикладная и структурная механика волокнистых материалов. – М.: "Тисо Принт", 2013.

6. *Матуконис А.В.* Строение и механические свойства неоднородных нитей. – М.: Легкая индустрия, 1971.

7. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986.

REFERENCES

1. *Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S.* Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.
2. *Kukin G.N., Solov'ev A.N.* Tekstil'noe materialovedenie. – Chast' 2. – M.: Legkaja industrija, 1964.
3. *Treloar L.R.G.* // J. Text. Inst. Trans. – 47, T.348. №8, 1956.
4. *Shherbakov V.P., Skulanova N.S.* Osnovy teorii deformirovanija i prochnosti tekstil'nyh materialov. – M.: MGTU im. A.N. Kosygina, 2008.
5. *Shherbakov V.P.* Prikladnaja i strukturnaja mehanika voloknistyh materialov. – M.: "Tiso Print", 2013.
6. *Matukonis A.V.* Stroenie i mehanicheskie svojstva neodnorodnyh nitej. – M.: Legkaja industrija, 1971.
7. *Feodos'ev V.I.* Soprotivlenie materialov. – M.: Nauka, 1986.

Рекомендована кафедрой текстильных технологий. Поступила 29.08.15.