

УДК 677.024.1

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРОЕНИЯ ТКАНИ  
ИЗ УГЛЕРОДНЫХ НИТЕЙ\***

**MATHEMATICAL MODEL OF THE GRAY  
CARBON FABIC**

*А.П. ГРЕЧУХИН*  
*A.P. GRECHUKHIN*

(Костромской государственной технологической университет)  
(Kostroma State Technological University)  
E-mail: niskstu@yandex.u

*В статье предложена система уравнений для прогнозирования параметров строения суровой ткани из углеродных нитей. Система предложенных уравнений решается численными методами с помощью специально разработанного программного обеспечения. Использована нелинейная теория изгиба, разработанная Поповым Е. П. Адекватность математической модели подтверждается статистической обработкой результатов измерений высот волн изгиба нитей основы и утка по микросрезам тканей.*

*The article suggests a system of equations to predict the parameters of the structure of gray fabric of carbon fibers. The system proposed by the equations solved by numerical methods using specially designed software. Use non-linear bending theory developed by Popov E.P. Adequate mathematical models supported by statistical analysis of the results of measurements of warp and weft wave heights.*

**Ключевые слова:** строение ткани, жесткость при изгибе, кривизна нити, высота волны изгиба нити.

**Keywords:** fabric structure, bending rigidity, curvature of the yarn, thread bending wave height.

Вопросами прогнозирования параметров строения тканей занимались многие ученые. В наиболее известных работах [1], [2] заложены основы теории строения тка-

ни. В работе [2] используется теория прогнозирования параметров строения тканей, которая позволяет с высокой точностью определять параметры структуры ткани.

\* Работа выполнена по гранту РФФИ № 14-08-00475.

Автор использует эластику Эйлера. Похожие методы применялись в [3], и были развиты в работах [4...7]. Однако авторы используют метод, который основывается на применении диаграмм, отсутствует математическая модель строения ткани. Кроме того, известна работа [8], выполненная под руководством Т.Ю. Каревой, и [9], выполненная под руководством В. П. Щербакова. Методика расчета строения трикотажной петли, не требующая экспериментальных диаграмм и таблиц, предложена В. П. Щербаковым [10]. Все перечисленные труды базируются на работе [11] и в качестве входных параметров требуют задания либо высот волн изгиба нитей, либо уработки нитей, что значительно ограничивает применимость теории. Нами разработана универсальная математическая модель строения ткани [12...14], которая позволяет не использовать данные, которые относятся к уже сформированной структуре тканей.

На основе расчетных значений параметров строения ткани исследователи используют различные подходы при моделировании формы нити в ткани, что определяет структуру расчетной модели для последующих расчетов (например, для анализа методом конечных элементов). Очень важным параметром, определяющим моделирование процесса разрушения тканого материала, будет длина нити в ячейке переплетения, которую необходимо рассчитать до создания геометрической модели.

Поэтому задача по прогнозированию параметров строения тканей актуальна. При расчете ячейки ткани любого переплетения необходимо рассчитать множество параметров – это длины нитей в пересечках между нитями, силу нормального давления между нитями, плотности ткани по основе и утку, высоты волн изгиба нитей, кривизну нитей, а также некоторые дополнительные параметры для расчета формы нити в ткани.

В данной статье в качестве примера представлена математическая модель строения ткани полотняного переплетения

из углеродных нитей 205 текс. Предлагаемая математическая модель является упрощением модели, представленной в работе [12], которая основывается на трудах по данной научной проблеме, изложенной в работах Николаева С.Д., Щербакова В.П., Каревой Т.Ю., Назаровой М.В. В качестве входных параметров выступают расстояния между нитями основы и утка, зависимости изгибающего момента нитей от кривизны и растягивающих нагрузок. Упрощение модели строится на том, что в ткани, снятой со станка, отсутствуют растягивающие нагрузки, а значит угол между направлением силы, приложенной к нити, и осью абсцисс равен 90°. Поэтому можем записать систему уравнений (1)...(10), основанную на упрощении математической модели строения ткани, изложенной в [12]:

$$\sqrt{\frac{N\ell_o^2}{H_o}} = \int_{\varphi A}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}}, \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} = 2 \arcsin(k \sin(\varphi A)), \quad (2)$$

$$\frac{h_o}{2\ell_o} = - \left( \frac{2 \int_{\varphi A}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)} d\varphi}{\sqrt{\frac{N\ell_o^2}{H_o}}} - 1 \right) \sin(\delta_o), \quad (3)$$

$$\frac{L_y}{2\ell_o} = \frac{2k \cos(\varphi A)}{\sqrt{\frac{N\ell_o^2}{H_o}}}, \quad (4)$$

$$\sqrt{\frac{N\ell_y^2}{H_y}} = \int_{\varphi Ay}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - ky^2 \sin^2(\varphi)}}, \quad (5)$$

$$\frac{\pi}{2} = 2 \arcsin(ky \sin(\varphi Ay)), \quad (6)$$

$$\frac{h_y}{2\ell_y} = - \left( \frac{2 \int_{\varphi A_y}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - ky^2 \sin^2(\varphi)} d\varphi}{\sqrt{\frac{N\ell_y^2}{H_y}}} - 1 \right) \sin(\delta_o), \quad (7)$$

$$\frac{L_o}{2\ell_y} = \frac{2ky \cos(\varphi A_y)}{\sqrt{\frac{N\ell_y^2}{H_y}}}, \quad (8)$$

$$H_o = \frac{f_o(\rho_o, F)}{\rho_o}, \quad (9)$$

$$H_y = \frac{f_y(\rho_y, F)}{\rho_y}, \quad (10)$$

где  $N$  – сила давления между нитями основы и утка;  $h_o, h_y$  – высота волны изгиба нити основы и утка соответственно;  $\ell_o, \ell_y$  – половина длины нити основы и утка соответственно;  $L_o, L_y$  – расстояния между нитями основы и утка соответственно;  $\varphi A, \varphi A_y$  – эллиптическая амплитуда в начальной точке изгиба для нити основы и утка соответственно;  $k, k_y$  – эллиптический модуль для нити основы и утка соответственно;  $H_o, H_y$  – жесткость нитей основы и утка на изгиб соответственно;  $\rho_o, \rho_y$  – кривизна нитей основы и утка соответственно;  $F$  – растягивающая нагрузка на нити основы и утка (в нашем случае отсутствует);  $f_o(\rho_o, F), f_y(\rho_y, F)$  – функциональные зависимости между кривизной нити, растягивающей нагрузкой и изгибающим моментом [15].

Зависимость жесткости основной пряжи на изгиб от растягивающей нагрузки и кривизны нити, полученная с использованием методики [15], описывается следующим уравнением:

$$H_o = \frac{f_o(\rho_o, F)}{\rho_o} = \frac{-0,056\rho_o + 0,174F_o + 0,039}{\rho_o}. \quad (11)$$

В качестве известных параметров выступают плотности по основе и утку (рас-

стояния между нитями):  $L_o = 1,51$  мм,  $L_y = 1,83$  мм, которые определялись экспериментально.

Система уравнений решалась с помощью разработанного программного обеспечения [17].

Результат расчета математической модели (1)...(10) представлен в табл. 1.

Таблица 1

$k$	0,8048
$k_y$	0,7888
$h_y$	0,2505 мм
$h_o$	0,3752 мм
$\varphi A$	1,0731 рад
$\varphi A_y$	1,1116 рад
$\ell_y$	0,7649 мм
$\ell_o$	0,9466 мм
$N$	0,0035 Н
$H_o$	0,005 Н·мм <sup>2</sup>
$H_y$	0,004 Н·мм <sup>2</sup>
$\rho_o$	0,6392 мм <sup>-1</sup>
$\rho_y$	0,6498 мм <sup>-1</sup>

Результаты расчетов указывают на очень малые силы давления между нитями основы и утка (0,35 сН), что в совокупности с малым коэффициентом трения углеродных нитей друг по другу объясняет очень высокую степень подвижности нитей в таких тканях. Так, при разрезании ткани вдоль основы или утка нити "высыпаются" из ткани под действием собственного веса.

Оценка адекватности математической модели (1)...(10) проводилась путем анализа соответствия расчетных и экспериментальных данных высот волн изгиба нитей в ткани. Экспериментальные значения получены путем анализа микросрезов ткани. Фотографии микросрезов ткани представлены на рис. 1 – для утка, на рис. 2 – для основы. Микросрезы получены путем заливки участка ткани эпоксидной смолой и последующим разрезанием ткани вдоль основы и утка. Полученное таким образом изображение анализировалось с использованием САД-системы КОМПАС 3D. Анализ заключался в сопоставлении размеров изображения с шаблоном (линейка в кадре). Точность расчетов устанавливалась до четвертого знака после запятой.

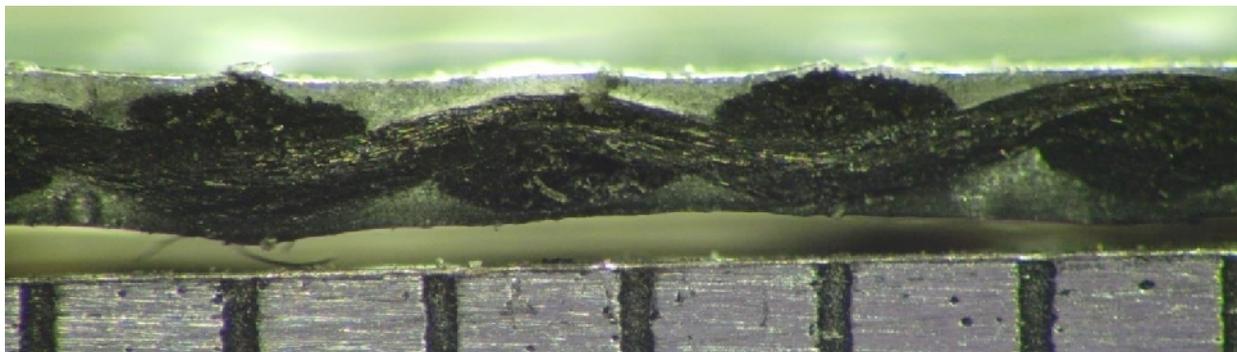


Рис. 1

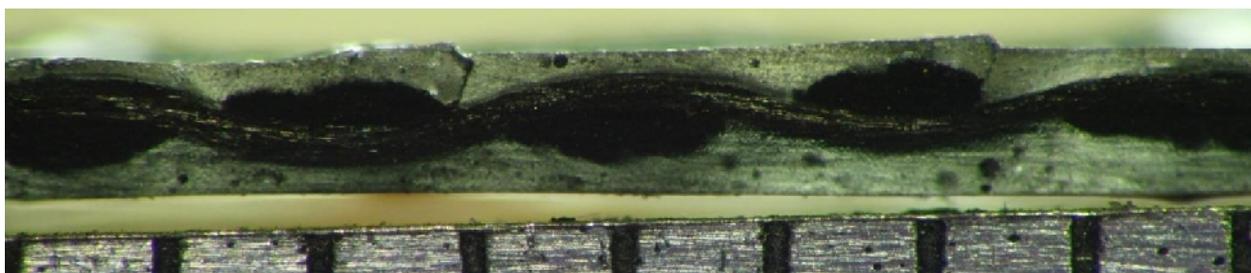


Рис. 2

Результат обработки микросрезов ткани вдоль утка представлен в табл. 2 (статистическая обработка измерений

высот волн изгиба нитей утка.). Вся статистическая обработка проводилась согласно [18].

Таблица 2

№ интервала	Диапазон значений интервала		Экспериментальные частоты ( $n_3$ )	Вероятность	Теоретические частоты ( $n_T$ )	$(n_3 - n_T)^2 / n_T$
	начало	конец				
1	$-\infty$	0,2195	4	0,1344	4,3019	0,0212
2	0,2195	0,2422	5	0,1858	5,9457	0,1504
3	0,2422	0,2649	9	0,2479	7,9323	0,1437
4	0,2649	0,2876	5	0,2230	7,1352	0,6389
5	0,2876	0,3103	8	0,1352	4,3269	3,1180
6	0,3103	$+\infty$	1	0,0737	2,3580	0,7821
Итого			32		32	4,8544
Среднее значение, мм					0,2588	
Среднее квадратическое отклонение, мм					0,0355	
Максимальное значение, мм					0,3325	
Минимальное значение, мм					0,1968	
Дисперсия, мм <sup>2</sup>					0,0013	
Относительная ошибка, %					4,86	

Расчетное значение критерия Пирсона:

$$\chi_p^2 = 4,8544.$$

Табличное значение критерия Пирсона:

$$\chi_T^2 [P_d = 0,95; f_x = k - r - 1 = 3] = 7,81.$$

Поскольку расчетное значение критерия меньше табличного, то гипотеза о нормальном законе распределения экспериментальных данных также не отвергается.

Проверка стационарности процесса (критерий квадратов последовательных разностей) [19]:

расчетное значение критерия:

$$\gamma_r = 0,7932;$$

табличное значение критерия:

$$\gamma_t[\alpha, m] = 0,7128.$$

Так как  $\gamma_r > \gamma_t[\alpha, m]$ , то гипотеза о стационарности процесса не отвергается.

Результат обработки микросрезов углеродной ткани вдоль основы представлен в табл. 3 (статистическая обработка измерений высот волн изгиба нитей основы).

Т а б л и ц а 3

№ интервала	Диапазон значений интервала		Экспериментальные частоты ( $n_o$ )	Вероятность	Теоретические частоты ( $n_r$ )	$(n_o - n_r)^2 / n_r$
	начало	конец				
1	$-\infty$	0,2876	4	0,1062	5,2055	0,2792
2	0,2876	0,3264	9	0,1558	7,6340	0,2444
3	0,3264	0,3652	15	0,2270	11,1251	1,3497
4	0,3652	0,4040	8	0,2307	11,3067	0,9670
5	0,404	0,4428	6	0,1636	8,0140	0,5061
6	0,4428	0,4816	3	0,0808	3,9608	0,2331
7	0,4816	$+\infty$	4	0,0358	1,7540	2,8762
Итого			49		49	6,4557
Среднее значение, мм					0,3669	
Среднее квадратическое отклонение, мм					0,0636	
Максимальное значение, мм					0,5202	
Минимальное значение, мм					0,2488	
Дисперсия, мм <sup>2</sup>					0,0041	
Относительная ошибка, %					4,96	

Расчетное значение критерия Пирсона:

$$\chi_p^2 = 6,4557.$$

Табличное значение критерия Пирсона:

$$\chi_T^2 [P_d = 0,95; f_x = k - r - 1 = 4] = 9,4877.$$

Поскольку расчетное значение критерия меньше табличного, то гипотеза о нормальном законе распределения экспериментальных данных также не отвергается.

Проверка стационарности процесса (критерий квадратов последовательных разностей) [19]:

расчетное значение критерия:

$$\gamma_r = 1,0693;$$

табличное значение критерия:

$$\gamma_t[\alpha, m] = 0,7667.$$

Так как  $\gamma_r > \gamma_t[\alpha, m]$ , то гипотеза о стационарности процесса не отвергается.

Сумму высот волн изгиба нитей основы и утка принимали по результатам анализа микросрезов тканей из табл. 2 и 3 (0,6257 мм).

Результаты расчета и измерений высот волн изгиба нитей основы и утка представлены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

Показатель	Фактическое значение, мм	Ошибка измерений, %	Расчетное значение, мм	Погрешность, %
$h_o$	0,3669	4,86	0,3752	2,3
$h_y$	0,2588	4,96	0,2505	3,3

## В Ы В О Д Ы

Разработана математическая модель для прогнозирования параметров строения суровой ткани из углеродных нитей, осно-

ванная на нелинейной теории изгиба, которая учитывает переменный характер жесткости нити при изгибе. Расхождение расчетных и экспериментальных данных не более 3,3%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Frederick Thomas Peirce D.Sc. and F.Inst.P. and F.T.I.: 5 – The Geometry of Cloth Structure // Journal of the Textile Institute Transactions – 28:3, T45-T96, 1937.*
2. *Olofsson B.: 49 – A General Model of a Fabric as a Geometric-Mechanical Structure // Journal of the Textile Institute Transactions – 55:11, T541-T557, 1964.*
3. *Мельяченко Ж.В., Николаев С.Д.* Взаимосвязь технологических параметров ткачества и параметров строения вырабатываемых тканей // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1991, № 1. С. 47...50.
4. *Слугин А.И.* Разработка оптимальных технологических параметров изготовления тканей на основе вторичной арамидной пряжи: Дис.... канд. техн. наук. – М.: МГТУ им. Косыгина, 2008.
5. *Иноземцева Н.А.* Разработка метода проектирования тканей по заданному порядку фазы строения: Дис.... канд. техн. наук. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2010.
6. *Кащеева М.М.* Разработка облегченных структур технических тканей из углеродных нитей и особенности их изготовления на ткацком станке: Дис....канд. техн. наук. – М.: МГТУ им. А. Н. Косыгина, 2009.
7. *Степанова Г.С.* Анализ причинно-следственных связей в ткачестве: Дис.... канд. техн. наук. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2006.
8. *Николаев С.Д., Ковалева О.В., Личуева А.А. и др.* Проектирование технологии тканей заданного строения. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2007.
9. *Егоров Н.В.* Анализ структур огнезащитных тканей из параарамидных нитей и особенности их изготовления на современном ткацком станке: Дис.... канд. техн. наук. – М.: МГТУ им. Косыгина, 2010.
10. *Щербakov В.П., Колесникова Е.Н., Горелова Ю.Г.* Расчет силовых и геометрических параметров кулирного двухслойного трикотажа сложнокомбинированных переплетений // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, №6. С. 89...94.
11. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1986.
12. *Grechukhin A. P., Seliverstov V.Yu.* Mathematical Model of Plain Weave Fabric at Various Stages of Formation. *Fibres & Textiles in Eastern Europe* 2014; 22. 5(107): 43...48.
13. *Гречухин А.П., Зайцев Д.В.* Совершенствование методики прогнозирования параметров строения ткани полотняного переплетения на основе нелинейной теории изгиба // Научный вестник Костромского гос. технолог. ун-та [электронный ресурс]. <http://vestnik.kstu.edu.ru/>. 12 С.
14. *Зайцев Д.В., Гречухин А.П.* Реализация метода расчета параметров строения ткани полотняного переплетения на основе нелинейной теории

изгиба // Научн. тр. молодых ученых КГТУ. – Кострома: КГТУ, 2012. Вып. 13. С. 42...46.

15. *Гречухин А.П.* Способ определения жесткости нити при изгибе // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2014, № 5. С.47...51.

16. *Draper. N.R., Smith. H. (1998) Applied Regression Analysis. 3rd Edition. by John Wiley & sons. Inc. 736p.*

17. *Зайцев Д.В., Гречухин А.П.* Расчет параметров строения тканей полотняного переплетения на основе нелинейной теории изгиба. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2012612560 от 11.03.2012.

18. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003.

19. *Севостьянов А.Г.* Методы и средства исследования механико-технологических процессов текстильной промышленности. – М.: Легкая индустрия, 1980.

## REFERENCES

1. *Frederick Thomas Peirce D.Sc. and F.Inst.P. and F.T.I.: 5 – The Geometry of Cloth Structure // Journal of the Textile Institute Transactions – 28:3, T45-T96, 1937.*
2. *Olofsson B.: 49 – A General Model of a Fabric as a Geometric-Mechanical Structure // Journal of the Textile Institute Transactions – 55:11, T541-T557, 1964.*
3. *Mel'jachenko Zh.V., Nikolaev S.D.* Vzaimosvjaz' tehnologicheskikh parametrov tkachestva i parametrov stroenija vyrabatyvaemykh tkanej // *Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti.* – 1991, № 1. S. 47...50.
4. *Slugin A.I.* Razrabotka optimal'nyh tehnologicheskikh parametrov izgotovlenija tkanej na osnove vtorichnoj aramidnoj prjazhi: Dis.... kand, tehn, nauk. – М.: MGTU im. Kosygina, 2008.
5. *Inozemceva N.A.* Razrabotka metoda proektirovanija tkanej po zadannomu porjadku fazy stroenija: Dis.... kand. tehn. nauk. – М.: MGTA im. A.N. Kosygina, 2010.
6. *Kashheeva M.M.* Razrabotka oblegchennykh struktur tehnicheskikh tkanej iz ugleodnykh nitej i osobennosti ih izgotovlenija na tkackom stanke: Dis....kand. tehn. nauk. – М.: MGTA im. A. N. Kosygina, 2009.
7. *Stepanova G.S.* Analiz prichinno-sledstvennykh svjazej v tkachestve: Dis.... kand. tehn. nauk. – М.: MGTU im. A.N. Kosygina, 2006.
8. *Nikolaev S.D., Kovaleva O.V., Likucheva A.A. i dr.* Proektirovanie tehnologii tkanej zadannogo stroenija. – М.: MGTU im. A.N. Kosy-gina, 2007.
9. *Egorov N.V.* Analiz struktur ogneshhitnykh tkanej iz paraarmidnykh nitej i osobennosti ih izgotovlenija na sovremennom tkackom stanke: Dis.... kand. tehn. nauk. – М.: MGTU im. Kosygina, 2010.
10. *Shherbakov V.P., Kolesnikova E.N., Gorelova Ju.G.* Raschet silovykh i geometricheskikh parametrov

kulirnogo dvuh-slojnogo trikotazha slozhnokombinirovannyh perepletений // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2006, №6. S. 89...94.

11. Popov E.P. Teorija i raschet gibkih uprugih sterzhnej. – M.: Nauka. Gl. red. fiz. - mat. lit., 1986.

12. Grechukhin A. P., Seliverstov V.Yu. Mathematical Model of Plain Weave Fabric at Various Stages of Formation. *Fibres & Textiles in Eastern Europe* 2014; 22. 5(107): 43...48.

13. Grechuhin A.P., Zajcev D.V. Sovershenstvovanie metodiki prognozirovaniya parametrov stroenija tkani polotnjanogo perepletенija na osnove nelinejnoj teorii izgiba // Nauchnyj vestnik Kostromskogo gos. tehnolog. un-ta [jelektronnyj resurs]. <http://vestnik.kstu.edu.ru/>. 12 S.

14. Zajcev D.V., Grechuhin A.P. Realizacija metoda rascheta parametrov stroenija tkani polotnjanogo perepletенija na osnove nelinejnoj teorii izgiba // Nauchn. tr. molodyh uchenyh KGTU. – Kostroma: KGTU, 2012. Vyp. 13. S. 42...46.

15. Grechuhin A.P. Sposob opredelenija zhestkosti niti pri izgibe // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2014, № 5. S.47...51.

16. Draper. N.R., Smith. H. (1998) *Applied Regression Analysis*. 3rd Edition. by John Wiley & sons. Inc. 736p.

17. Zajcev D.V., Grechuhin A.P. Raschet parametrov stroenija tkanej polotnjanogo perepletенija na osnove nelinejnoj teorii izgiba. Svidetel'stvo o registracii programmy dlja JeVM № 2012612560 ot 11.03.2012.

18. Gmurman V.E. Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika – 9-e izd., ster. – M.: Vysshaja shkola, 2003.

19. Sevost'janov A.G. *Metody i sredstva issledovaniya mehaniko-tehnologicheskikh processov tekstil'noj promyshlennosti*. – M.: Legkaja industrija, 1980.

Рекомендована кафедрой технологии проектирования ткани и трикотажа. Поступила 30.09.15.