677.057.121:519.612

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ВАЛОВ ВАЛКОВЫХ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАШИН

NUMERICAL ALGORITHMS FOR STATIC ANALYSIS OF SHAFTS FOR ROLLER TEXTILE MACHINES.

В.А.МАРТЫШЕНКО, А.В. ПОДЪЯЧЕВ
V.A. MARTYSHENKO, A.V. POD'YACHEV

(Военная академия радиационной, химической и бактериологической защиты им. Маршала С.К. Тимошенко, Костромской государственный технологический университет)
(Military Academy of Radiation, Chemical and Bacteriological Protection Named after Marshal S.K. Timoshenko, Kostroma State Technological University)
E-mail: aulvip@yandex.ru; sopromat@kstu.edu.ru

В статье изложены вопросы статического анализа валов валковых текстильных машин с использованием численного метода. Приведен алгоритм решения задачи без и с учетом сил собственного веса.

The article presents the issues of static analysis of roller shafts for textile machinery using numerical method. The algorithm of solving the problem without and with the force of its own weight.

Ключевые слова: валковый модуль, краевые условия, численный метод, дифференциальные уравнения.

Keywords: roller module, boundary conditions, numerical method, differential equations.

Ранее были рассмотрены вопросы статического анализа двухвалкового [1] и трехвалкового [2] модулей аналитическим способом. Использование численного метода для решения задачи статического анализа валковых модулей текстильных машин позволяет оптимизировать процедуру автоматизированного построения уравнений состояния рассматриваемого объекта.

В зависимости от количества валов валковый модуль относится к многоточечной краевой задаче (4 точки – для двухвалкового модуля, 6 точек – для трехвалкового модуля и т.д.) и описываемой системой n-дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
&EI_1v_1^{IV} + \chi_{12}(v_1 - v_2) = 0;\\
&EI_2v_2^{IV} + \chi_{12}(v_2 - v_1) + \chi_{23}(v_2 - v_3) = {}^{IV}0;\\
&EI_3v_3^{IV} + \chi_{23}(v_3 - v_2) + \chi_{34}(v_3 - v_4) = 0; \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&EI_nv_n^{IV} + \chi_{(n-1)(n)}(v_n - v_{n-1}) = 0,
\end{aligned}$$

где EI_n – изгибная жесткость участка n-го вала; $\chi_{(n-1)(n)}$ – коэффициент упругости основания между участками n-го и (n-1)-го вала; v_n – прогиб участка n-го вала.

Краевые кинематические и статические условия представлены выражениями (2) и (3) соответственно:

$$\begin{aligned}
&(v_1)_{z=0} = V_2^{(1)};\ -(dv_1/dz)_{z=0} = \varphi_2^{(1)};\\
&(v_1)_{z=l} = V_1^{(1)};\ -(dv_1/dz)_{z=l} = \varphi_1^{(1)};\\
&(v_2)_{z=0} = V_4^{(2)};\ -(dv_2/dz)_{z=0} = \varphi_4^{(2)};\\
&(v_2)_{z=l} = V_3^{(2)};\ -(dv_2/dz)_{z=l} = \varphi_3^{(2);} \qquad (2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(v_n)_{z=0} = V_{2n}^{(n)};-(dv_n/dz)_{z=0} = \varphi_{2n}^{(n)};\\
&(v_n)_{z=l} = V_{2n-1}^{(n)};-(dv_n/dz)_{z=l} = \varphi_{2n-1}^{(n)},
\end{aligned}$$

где v_n – прогиб участка n-го вала; $V_{2n}^{(n)}$, $V_{2n-1}^{(n)}$ – узловые линейные перемещения в концевых сечениях участка n-го вала; $\varphi_{2n}^{(n)}$, $\varphi_{2n-1}^{(n)}$ – узловые угловые перемещения в концевых сечениях участка n-го вала.

$$\begin{cases} (EI_1 d^3v_1/dz^3)_{z=0} = F_{y2}^{(1)}; \;\; (EI_1 d^2v_1/dz^2)_{z=0} = M_{x2}^{(1)}; \\ -(EI_1 d^3v_1/dz^3)_{z=l} = F_{y1}^{(1)}; \; -(EI_1 d^2v_1/dz^2)_{z=l} = M_{x1}^{(1)}; \\ (EI_2 d^3v_2/dz^3)_{z=0} = F_{y4}^{(2)}; \;\; (EI_2 d^2v_2/dz^2)_{z=0} = M_{x4}^{(2)}; \\ -(EI_2 d^3v_2/dz^3)_{z=l} = F_{y3}^{(2)}; \; -(EI_2 d^2v_2/dz^2)_{z=l} = M_{x3}^{(2)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (EI_n d^3v_n/dz^3)_{z=0} = F_{2n}^{(n)}; \;\; (EI_n d^2v_n/dz^2)_{z=0} = M_{2n}^{(n)}; \\ -(EI_n d^3v_n/dz^3)_{z=l} = F_{2n-1}^{(n)}; \; -(EI_n d^2v_n/dz^2)_{z=l} = M_{2n-1}^{(n)}, \end{cases} \qquad (3)$$

где $F_{2n}^{(n)}$, $F_{2n-1}^{(n)}$ – узловые поперечные силы в концевых сечениях n-го вала; $M_{2n}^{(n)}$, $M_{2n-1}^{(n)}$ – узловые изгибающие моменты в концевых сечениях n-го вала.

Введем новые безразмерные переменные X, связанные с функциями $V_1 \dots V_n$ и их производными соотношениями:

$$X_{2i-1} = V_i/l_0; \;\; X_{2i} = dX_{2i-1}/d\zeta; \;\; X_{2i+2n} = I_i/I_0 \, dX_{2i}/d\zeta; \; X_{2i+(2n-1)} = dX_{2i+4}/d\zeta\,, \qquad (4)$$

где i – номер вала; n – количество валов в валковом модуле; $X_{2i} = -\varphi_i$; $X_{2i+(2n-1)} = M_i l_0/(E_0 I_0)$; $X_{2i+2n} = F_i l_0^2/(E_0 I_0)$; $(i = 1 \dots n)$; E_0, I_0, l_0 – нормирующие множители.

Уравнения (4) и (1) образуют систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$dX/d\zeta = A\,X, \qquad (5)$$

где $X = [X_1, X_2, \dots X_{4n}]^{т}$ – вектор кинематических и статических начальных параметров.

После интегрирования уравнения на интервале $0 <= \zeta <= 1$ и выполнения линейных преобразований получаем матрицу состояния K.

Матрица связи A для сэндвич-элемента двухвалкового модуля имеет вид

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & & & & & & \\ \hline & & & & & I_0/I_1 & & \\ \hline & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & & & & I_0/I_2 \\ \hline -r & & r & & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & \\ \hline r & & -r & & & & & \\ \hline & & & & & & 1 & \\ \hline \end{array}\,,$$

где $r = \chi_{(n-1)(n)}\, l_0^4/(E_0 I_0)$.

Для трехвалкового модуля матрица A представлена блочными квадратными матрицами шестого порядка

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline \end{array}\,, \qquad (6)$$

где $A_{11} = A_{22}^{T}$, а ненулевые элементы матриц A_{11} и A_{12} имеют значения $A_{11}[2i-1,2i] = 1$; $A_{12}[2i,2i] = I_0/I_1$; $i = (1,2,3)$.

$$A_{21} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\chi_{12}r_0 & \chi_{12}r_0 & \\ \hline \chi_{12}r_0 & -(\chi_{12}+\chi_{23})r_0 & \chi_{23}r_0 \\ \hline & \chi_{23}r_0 & -\chi_{23}r_0 \\ \hline \end{array}\,,$$

где $r_o = \ell_0^4/(E_0 I_0)$.

Собственный вес валов валкового модуля достигает нескольких сот килограммов, что при определенных технологических режимах составляет заметную часть от усилия прижима одного вала к другому валу. В связи с этим систему однородных дифференциальных уравнений для статического анализа (1) дополним неоднородными членами:

$$\begin{aligned} &EI_1 v_1^{IV} + \chi_{12}(v_1 - v_2) = g_1; \\ &EI_2 v_2^{IV} + \chi_{12}(v_2 - v_1) + \chi_{23}(v_2 - v_3) = g_2; \\ &EI_3 v_3^{IV} + \chi_{23}(v_3 - v_2) + \chi_{34}(v_3 - v_4) = g_3; \quad (7) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &EI_n v_n^{IV} + \chi_{(n-1)(n)}(v_n - v_{n-1}) = g_n, \end{aligned}$$

где g_n – собственный погонный вес валов.

Уравнения (4) и (7) образуют систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка вида (5):

$$dX/d\zeta = A\,X + B\,G, \qquad (8)$$

где $G = [0, 0, \dots 0, -g_1, 0, \dots -g_n, 0]^T$ – вектор свободных членов. Количество нулевых элементов в первой части вектора равно 2n, количество пар $-g_i$, 0 равно n.

Решение системы уравнений (8) находим в виде суммы общего и частного решения.

Для нахождения общего решения рассматриваем систему (8) последовательно 4n раз при нулевом векторе G на интервале интегрирования (0; z). Первый раз решение выполняем при векторе начальных краевых условий (1, 0, … , 0), второй раз – (0,1, … ,0), и, наконец, 4n-й раз – (0,0,…,1).

Численное интегрирование системы уравнений n раз дает соответственно n векторов, являющихся столбцами матрицы A. В левой части равенства получаем значения кинематических и статических параметров в правом сечении:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ F_1 \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

где V_1, V_2 – векторы узловых перемещений в левом и правом сечении соответственно; F_1, F_2 – векторы узловых силовых факторов в левом и правом сечении соответственно.

Нахождение частного решения проводим при нулевом векторе начальных параметров. При первом интегрировании принимаем G со значением 1 на месте g_1, на месте g_2, и так до n. В итоге получаем n векторов матрицы B размерностью 4n*n. С учетом частного решения уравнение (9) окончательно принимает вид:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ F_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot \bar{G} \qquad (10)$$

где $\bar{G} = [-g_1, -g_n]^T$.

Уравнение (10) неудобно для решения задач, содержащих последовательно расположенные участки, каждый из которых описывается уравнением (10). Для получения уравнения состояния элемента необходимо объединить векторы V_1 и V_2 в один вектор $V= [V_1, V_2]^T$, а векторы F_1 и F_2 – в вектор $F= [F_1, F_2]^T$.

После выполнения соответствующих матричных операций над (10) в итоге получаем:

$$F = K\,V + H\,\bar{G}, \qquad (11)$$

или:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \cdot \bar{G}, \qquad (12)$$

где $F = [F_1, F_2]^T$; $V= [V_1, V_2]^T$; K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}, H_1, H_2 – матрицы, полученные при преобразовании (10).

Далее уравнения состояния для отдельных элементов автоматизировано собираются в одно уравнение состояния всего валкового модуля с помощью матрицы топологии. Решение системы линейных алгебраических уравнений позволяет определить узловые перемещения, а обратный переход к уравнениям состояния отдельных элементов – узловые силовые факторы по всем отдельным элементам.

ВЫВОДЫ

Представленные алгоритмы применения численного метода для статического анализа валов валковых модулей текстильных машин позволяют проводить расчеты валковых модулей с произвольным количеством валов с учетом топологии структуры их соединения в модуле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартышенко В.А., Подъячев А.В.* Алгоритмы расчета удельных нагрузок в жале валов двухвалковых механизмов // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1988, №3.
2. *Мартышенко В.А., Подъячев А.В*. Математическая модель статического анализа 3-валкового модуля // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1997, №5.

REFERENCES

1. Martyshenko V.A., Pod"jachev A.V. Algoritmy rascheta udel'nyh nagruzok v zhale valov dvuhvalkovyh mehanizmov // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 1988, №3.

2. Martyshenko V.A., Pod"jachev A.V. Matematicheskaja model' staticheskogo analiza 3-valkovogo modulja // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 1997, №5.

Рекомендована кафедрой инженерной графики, теоретической и прикладной механики КГТУ. Поступила 30.09.15.