

УДК 677.05323

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НИТИ В ВЕЕРЕ РАСКЛАДКИ

А. И. МУНИЦЫН

(Ивановский государственный энергетический университет)

В механических системах с движущимися нитями возможны колебания с большими амплитудами, вызывающими вытяжку нити или ее обрыв. Теоретические основы нелинейной механики нити изложены ранее [1]. При исследовании вынужденных колебаний нити в веере раскладки при перематывании на мотальной машине типа М-2М [2] выявленные в результате скоростной киносъемки колебания с большой амплитудой объясняются кинематическим возбуждением в узлах пересечения канавок мотального барабанчика.

Схема движения нити в веере раскладки мотальным барабанчиком приведена на рис. 1 и совпадает со схемой [2]. Поскольку перемещения точки А являются большими ($h/l=0,27$), необходимо рассматривать нелинейные уравнения движения нити [1]. Если пренебречь продольными деформациями нити и ее изгибной жесткостью и учесть диссипацию по модели внешнего демпфирования путем введения в исходные уравнения силы трения: $F_{тр} = -b(\partial w/\partial t)$, то дифференциальное уравнение поперечных колебаний неподвижной нити можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial w}{\partial s} \right) = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b \frac{\partial w}{\partial t},$$

- где w — поперечное перемещение нити;
- s — координата вдоль деформированной оси нити;
- T — натяжение нити;
- ρF — линейная плотность;
- b — коэффициент внешнего демпфирования.

Поскольку точка А перемещается по мотальному барабанчику, считаем движение нити вдоль оси X равномерным со скоростью u :

$$x' = x + ut,$$

где x, x' — соответственно неподвижная и подвижная координаты, в отличие от [1], где при неподвижных крайних точках нити движение полагается равномерным вдоль координаты s . Переходя к переменным Эйлера, получаем уравнение колебаний нити в неподвижной системе координат OXY :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial w}{\partial s} \right) = \rho F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ + b \frac{\partial w}{\partial t} + ub \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Используя геометрическое соотношение $ds = dx \sqrt{1 + (\partial w/\partial x)^2}$ и вводя безразмерные координату, время и прогиб нити

$$x^* = x/l, \quad t^* = t(1/l) \cdot \sqrt{T/\rho F}, \quad w^* = w/l,$$

(1) преобразовываем к виду (звездочки далее опускаем)

$$\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - v \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где $v = u/a$ — безразмерная скорость движения нити;

$a = \sqrt{T/\rho F}$ — скорость распространения изгибной волны;

$\varepsilon = bl/\rho Fa$ — безразмерный коэффициент демпфирования.

Оставляя в (2) наиболее существенные нелинейные члены, получаем дифференциальное уравнение колебаний движущейся нити:

$$\left[1 - v^2 - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - v \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

и краевые условия

$$w(0) = 0; \quad w(1) = H(t), \quad (4)$$

где $H(t)$ — заданный закон движения правого конца нити по мотальному барабанчику, отнесенный к длине l нити.

Решение краевой задачи (3)...(4) удобно представить в виде суммы движения жесткой оси OA и колебательного движения вокруг нее:

$$w(x, t) = H(t)x + W(x, t). \quad (5)$$

В этом случае дифференциальное уравнение и граничные условия для функции $W(x, t)$ принимают вид

$$\left[1 - v^2 - 2 \left(H(t) + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2v \left(\frac{dH}{dt} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \right) - v \varepsilon \left(H(t) + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} x - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} x - \varepsilon \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$W(0) = 0; \quad W(1) = 0. \quad (7)$$

В отличие от рассматриваемой в [1] краевая задача (6)...(7) имеет однородные граничные условия, что позволяет решать ее классическими методами нелинейной теории колебаний. За базисные функции при использовании метода Бубнова — Галеркина можно принять функции $\sin k\pi z$ ($k=1, 2, 3, \dots$), удовлетворяющие граничным условиям (7). Ограничиваясь одним членом ряда, представляем решение в виде

$$W(x, t) = \varphi(t) \sin \pi z.$$

Из условия ортогонализации результата подстановки в (6) к базисной функции $\sin \pi z$ получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + \pi^2 (1 - v^2 - 2h \sin^2 \Theta t) \varphi - 33,1 \varphi^3 =$$

$$= C_1 \sin \Theta t + C_2 \cos \Theta t, \quad (8)$$

где $C_1 = hk(4\varepsilon v + 0,636\Theta^2)$; $C_2 = h\Theta(8v + 0,636\varepsilon)$ и полагается, что по мотальному барабанчику нить движется согласно гармоническому закону

$$H(t) = h \sin \Theta t.$$

Здесь $\Theta = \omega l / 2na$ — безразмерная частота раскладки;

ω — скорость вращения мотального барабанчика;

n — число витков на мотальном барабанчике.

Скорость движения нити $u = \omega r$, где r — радиус мотального барабанчика, следовательно

$$v = 2n\Theta(r/l) = k\Theta.$$

Уравнение (8) описывает движение системы с одной степенью свободы с мягкой кубической нелинейностью. Наряду с параметрическим возбуждением присутствует внешняя периодическая вынуждающая сила. Метод решения подобных уравнений [3] основывается на приведении к нелинейным интегродифференциальным уравнениям. Приближенное решение (8) можно получить более простыми методами, например, методом гармонического баланса, поскольку частота первого параметрического резонанса Θ совпадает с частотой вынуждающей силы. Сдвиг фаз между параметрическими и внешними возбуждениями объясняется наличием движения нити и учетом диссипации. В первом приближении решение (8) находится в виде

$$\varphi(t) = B \sin \Theta t + D \cos \Theta t.$$

Подставляя его в (8) и приравнявая коэффициенты при $\sin \Theta t$ и $\cos \Theta t$, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно B и D :

$$\begin{aligned} [\pi^2(1-v^2) - \Theta^2 - (3/2)h^2]B - \varepsilon\Theta D - 24,8(B^2+D^2)B - C_1 &= 0, \\ \varepsilon\Theta B + [\pi^2(1-v^2) - \Theta^2 - (1/2)h^2]D - 24,8(B^2+D^2)D - C_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

которая для заданного значения частоты кинематического возбуждения нити Θ позволяет определить амплитуду $A = \sqrt{B^2+D^2}$ и фазу $\arctg B/D$

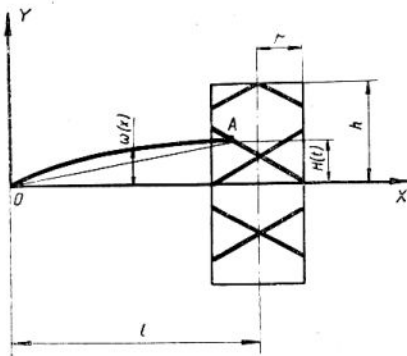


Рис. 1.

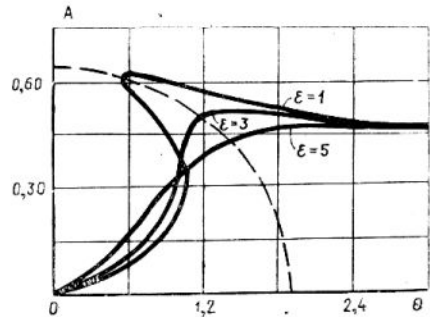


Рис. 2.

гармонической функции $\varphi(t)$. Ввиду сложности аналитического решения корни системы (9) находились численно. Решение уравнений заменялось задачей минимизации целевой функции по B и D при заданных Θ . За целевую функцию принималась сумма квадратов левых частей уравнений (9). Точкам нулевого минимума соответствует решение системы уравнений. Минимизация проводилась численно методом деформированного многогранника. Вычисления проводились для значений параметров $h=0,27$ и $k=0,43$, что соответствует геометрическим размерам $l=270$ мм, $h=75$ мм, $r=23$ мм и $n=2,5$.

Полученные амплитудно-частотные характеристики для различных значений параметра диссипации ϵ приведены на рис. 2. Штриховой линией обозначена скелетная кривая, найденная из решения (9) при отсутствии возбуждения ($h=0$). Как и следовало ожидать, для системы с мягкой нелинейностью при увеличении амплитуды частота свободных колебаний уменьшается. Собственная частота линейной системы $\Theta^2 = \pi^2(1-v^2)$, что качественно совпадает с точным решением [1]. В области малых частот раскладки (для рассматриваемого типа мотальных машин $\Theta=0,5\dots 1$) при малом демпфировании возможно три режима колебаний нити с различными условиями A_1, A_2, A_3 . Из них колебания со средней амплитудой A_2 являются неустойчивыми [4] и, следовательно, не реализуются. Решение линейной задачи приводит к решению, достаточно близкому к движению с амплитудой A_1 .

Создание в системе колебаний с амплитудой A_1 или A_3 зависит от начальных условий, которые нельзя точно задать. Под действием случайных возбуждений, к которым можно отнести кинематическое возбуждение нити в узлах пересечения канавок мотального барабанчика, возможно создание режима колебаний нити с большой амплитудой. Как следует из рис. 2, амплитуда этих колебаний $A_3 \cong 0,6$ в достаточно большом диапазоне коэффициента демпфирования, что соответствует амплитуде 160 мм для $l=270$ мм и наблюдается, по-видимому, в процессе скоростной киносъемки.

Из полученной АЧХ можно определить критическую скорость ω вращения мотального барабанчика, с превышением которой возникают колебания с большой амплитудой. Для рассматриваемых данных при $\epsilon=1$ $\Theta_{кр}=0,55$, что соответствует $\omega=0,55 \cdot 2\pi n/l$.

ВЫВОДЫ

1. Получены нелинейные уравнения, описывающие колебания нити в веере раскладки и обуславливающие возможность решения классическими методами нелинейной теории колебаний.

2. Методом Бубнова — Галеркина построена зависимость амплитуды колебаний нити от частоты раскладки в мотальной машине.

3. Ввиду наличия двух устойчивых режимов движения нити колебания с большой амплитудой могут создаваться за счет неучтенных случайных воздействий, например, кинематического возбуждения нити в узлах пересечения канавок мотального барабанчика.

4. Разработанный алгоритм расчета позволяет определить критическую скорость вращения мотального барабанчика, с превышением которой возможны колебания нити с большой амплитудой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигушов И. И. Механика текстильных нитей и тканей. — М.: Легкая индустрия, 1980.

2. *Бойко С. В.*//Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1994, № 5.
3. *Шмидт Г.* Параметрические колебания.— М.: Мир, 1978.
4. Вибрации в технике. Т. II/Под ред. И. И. Блехмана.— М.: Машиностроение, 1979.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 13.01.97.
