

УДК 621.86.01:62-525

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДАВЛЕНИЯ  
В ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ  
С ПОМОЩЬЮ ОБЫКНОВЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*А. С. ДОНСКОЙ*

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

Моделирование процессов в пневматических объектах основывается на результатах исследования волновых явлений в линии связи (ЛС) с использованием математических моделей в частных производных [1], которые позволяют описать процессы изменения давления на концах ЛС обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Особенность метода моделирования процессов в ЛС состоит в том, что полученная модель учитывает взаимосвязь основных физических и газодинамических процессов, включая волновые явления, и при этом практически без погрешности описывает их обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Для математического описания динамики ЛС обыкновенными дифференциальными уравнениями приняты допущения, правомерность которых доказана теоретическими выводами и результатами экспериментальных исследований.

При моделировании газодинамических процессов в ЛС достаточно рассматривать процессы не в каждой точке по длине линии, а учитывать их интегральное проявление на ее концах, что в первую очередь необходимо для выполнения практических расчетов и исключает переход к дифференциальным уравнениям в частных производных; изменение средней по длине линии скорости движения газа связано с изменением давлений внутри линии на ее концах, связь между давлением и плотностью на концах линии в каждый момент времени определяется степенью деформации (сжатия или расширения) соответствующей половины объема газа в линии.

Для обоснования принятых допущений проведены теоретические исследования линии как объекта с распределенными параметрами. При этом рассматривалась известная математическая модель линии, описываемая системой дифференциальных уравнений в частных производных [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{8\lambda\theta}{f} (\rho v) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} &= 0, \\ \frac{P}{\rho} &= RT, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $f$  — площадь поперечного сечения линии;  
 $c$  — скорость звука в газе;  
 $P, \rho$  и  $v$  — текущие значения давления, плотности и скорости газа в линии;  
 $R$  — газовая постоянная;  
 $T$  — температура газа;  
 $\Theta$  — коэффициент кинематической вязкости газа.

Создан метод решения системы (1) в виде конечных аналитических зависимостей [1], на основе которого выполнены теоретические исследования динамики ЛС для обоснования принятых допущений. В результате разработан новый метод математического описания динамики линий связи системой обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающий взаимосвязь основных физических явлений внутри линии, включая волновые процессы.

Полученная математическая модель ЛС имеет вид

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= P_1 f - P_2^* f - P_{тр} f, \\ P_2^* &= \begin{cases} P_{20}; & t < l/c, \\ P_2; & t \geq l/c, \end{cases} \\ \frac{dm}{dt} &= G_{вх} - G_{вых}, \\ \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{2P_1}{l} \left( v - \frac{l}{m} G_{вх} \right), \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{2P_2}{l} \left( \frac{l}{m} G_{вых} - v \right), \\ P_{тр} &= \zeta \frac{m}{2fl} v^2 \text{sign}(v), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $G_{вх}$  и  $G_{вых}$  — расходы газа через дроссели в начале и конце линии (определяются по известным формулам в зависимости от характера течения газа);

$m$  — масса газа в линии;  
 $P_1$  и  $P_2$  — давления в начале (после дросселя) и в конце (перед дросселем) ЛС;  
 $P_{20}$  — начальное давление в линии;  
 $P_{тр}$  — потери давления на трение в линии;  
 $\zeta$  — коэффициент сопротивления линии;  
 $v$  — средняя по длине ЛС скорость движения газа.

Данная система описывает изменение давления газа на концах ЛС для любых режимов течения (ламинарного и турбулентного).

Новый метод моделирования динамики ЛС позволил обобщить в единую модель известные модели разных типов линий, а для ламинарного течения газа получить аналитические решения для их расчета. В случае ламинарного течения в самой линии и в дросселях на ее входе и выходе математическая модель значительно упрощается:

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= P_{20}, & t < l/c, \\ \frac{d^2 P_2}{dt^2} + J_1 \frac{dP_2}{dt} + J_2 P_2 &= J_3; & t \geq l/c. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Коэффициенты уравнений (3) определяются по формулам

$$J_1 = \frac{8\pi\theta}{f} + \frac{2f}{c_1 l} + \frac{2c_2 RT}{lf},$$

$$J_2 = \frac{2RT}{l^2} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 + \frac{8\pi\theta c_2}{f^2} \right);$$

$$J_3 = \frac{2RT P_{\text{ВЫХ}}}{l^2} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 + \frac{8\pi\theta c_2}{f^2} + \frac{P_{\text{ВХ}} - P_{\text{ВЫХ}}}{P_{\text{ВЫХ}}} \right),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — коэффициенты расходных характеристик дросселей на входе и выходе линии в уравнениях расходов  $G_1 = c_1 [P_{\text{ВХ}} - P(0, t)]$  и  $G_2 = c_2 [P(l, t) - P_{\text{ВЫХ}}]$ .

Уравнение (3) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которого находится аналитическими методами в зависимости от корней характеристического уравнения.

Для подтверждения справедливости разработанной математической модели (2) ЛС результаты расчетов сравнивались с расчетами по модели линии в частных производных.

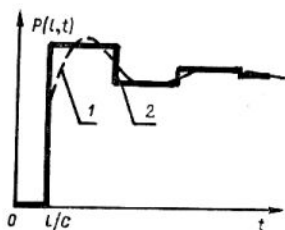


Рис. 1.

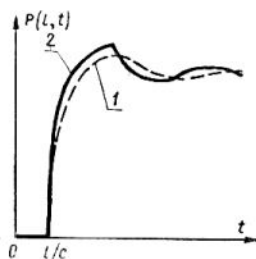


Рис. 2.

На рис. 1 и 2 приведены графики переходных процессов на конце ЛС, построенные 1 — по результатам решения уравнений (3) и 2 — системы (1) дифференциальных уравнений в частных производных для разных законов изменения давления на входе: скачкообразного (рис. 1) и экспоненциального (рис. 2).

Для случая ламинарного течения газа в линии и дросселях на входе и выходе решения уравнений (1) в частных производных и системы (2) полностью совпадают:

$$P_{2y} = P_{\text{ВЫХ}} + \frac{P_{\text{ВХ}} - P_{\text{ВЫХ}}}{\left( \frac{c_2}{c_1} + \frac{f^2 + 8\pi\theta c_2}{f^2} \right)}.$$

Для частных случаев из данной системы получаются известные математические модели ЛС. Например, для линий, которые по своим параметрам соответствуют камере, после преобразований имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{V}{RT(c_1 + c_2)} \frac{dP_2}{dt} + P_2 = \frac{c_1}{(c_1 + c_2)} P_{\text{ВХ}} + \frac{c_2}{(c_1 + c_2)} P_{\text{ВЫХ}}.$$

которое в газовой динамике известно как уравнение проточной камеры [3].

Для коротких незадресселированных линий математическая модель (3) дает выражение

$$\frac{\dot{i}}{8\pi\theta} \frac{dv}{dt} + v = \frac{\dot{i}}{8\pi\theta\rho l} (P_{\text{вх}} - P_{\text{вых}}),$$

полностью совпадающее с уравнением в газовой динамике, описывающим процесс разгона рабочей среды в незадресселированной короткой линии [3].

Таким образом, полученная модель ЛС является общей для всех типов линий.

Разработанный метод моделирования подтверждается результатами экспериментальных исследований для различных типов линий и уровней давлений. На рис. 3 приведены графики изменения давления в начале  $P_1$  и на конце  $P_2$  линии при ее опустошении. Экспериментальная кривая 1 получена ранее [4], а 2 построена по результатам решения системы уравнений (2).

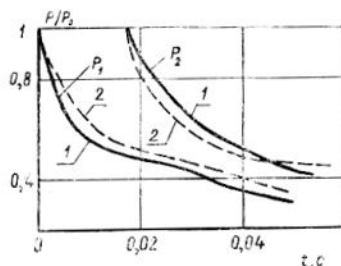


Рис. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Донской А. С., Климов В. А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1997, № 2.
2. Елимелех И. М., Сидоркин Ю. Г. Струйная автоматика (пневмоника) — Л.: Лениздат, 1972.
3. Залманзон Л. А. Теория элементов пневмоники. — М.: Наука, 1969.
4. Цейров Е. М. Вопросы газовой динамики воздушных выключателей. — М.: Госэнергоиздат, 1961.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и графики. Поступила 29.11.96.