

К ВОПРОСУ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Н.В. НУЖДИН, Ф.Н. ЯСИНСКИЙ

(Ивановский государственный энергетический университет)

При компьютерном моделировании технологических процессов в текстильных аппаратах и поиске оптимальных режимов их работы часто приходится иметь дело с уравнениями или системами уравнений вида

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i Q) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) + F_Q. (1)$$

Под такую форму подпадают многие задачи аэрогидродинамики, тепломассопереноса, движения многофазных сред, в частности, воздушно-волоконистых потоков и другие.

В (1) t – время; x_i – декартовы координаты; u_i – составляющие скорости по координатным осям; D – коэффициент переноса; Q – характеристики технологического процесса, например, составляющие

импульса движущейся среды, температура, плотности компонентов в потоке: волокно, воздух, сорные примеси, параметры турбулентности и т.д.; F_Q – некоторые правые части.

Численное решение таких уравнений с достаточной для приложений точностью связано с определенными вычислительными трудностями, в частности, с большими затратами машинного времени. Однако появление многопроцессорных вычислительных систем с большой производительностью, а также разработка соответствующих быстрых алгоритмов позволяют поставить вопрос о моделировании технологических процессов на более высоком уровне.

Рассмотрим вычислительные приемы, показавшие высокую эффективность при решении задач типа (1), и оптимальное распараллеливание вычислений, если для

решения аэрогидродинамических задач применяются многопроцессорные системы или компьютерные сети.

Каждая разностная схема, применяемая для интегрирования уравнения (1), вносит в решение свои специфические искажения – обладает своим спектральным портре-

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\text{Я}}(\omega) &= 1 - D\omega^2 \tau \xi(\omega), & \mu_{\text{НЯ}}(\omega) &= \frac{1}{(1 + D\omega^2 \tau \xi(\omega))}, \\ \mu_{\text{Т}}(\omega) &= \exp(-D\omega^2 \tau), & \xi(\omega) &= \sin^2\left(\frac{\omega h}{2}\right) / \left(\frac{\omega h}{2}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь τ – шаг по времени; h – шаг сетки; ω – волновое число.

Таким образом, амплитуды в разложении Фурье

$$Q = \sum_k A_k e^{i\omega_k x}, \quad (3)$$

соответствующие ω_k , искажаются для явной и неявной разностной схем как

$$\frac{\mu_{\text{Я}}}{\mu_{\text{Т}}}, \frac{\mu_{\text{НЯ}}}{\mu_{\text{Т}}}.$$

Вычислительный процесс, как показали численные эксперименты, можно существенно улучшить, если чередовать шаги по явной и неявной схемам. При этом сохраняется вычислительная устойчивость при любых τ .

Вторым приемом, исправляющим спектральный портрет объединенного метода, считаем решение задачи на нескольких сетках с различными размерами ячейки h . Периодическая переброска решения с сетки на сетку (с мелкой на крупную и обратно) позволяет быстро погасить наиболее опасную высокочастотную составляющую погрешности.

Третий спектральный прием состоит в периодической (через определенное число шагов по времени) фильтрации получающихся полей, при которых подавляются наиболее опасные составляющие погрешности.

Фильтрация выполняется по обычным правилам теории фильтров:

том. Действительно, если возникающую погрешность разложить в ряд Фурье, то даже в простейшем одномерном чисто диффузионном процессе получим соответственно шаговые переходные множители для явной и неявной схем и точного решения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}^{k+1} &= E(\tau, h, Q^k), \\ Q_S^{k+1} &= \sum_n \Phi_n \tilde{Q}_{S+n}^{k+1}, \\ \Phi_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\omega) \cos \omega x_n d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь E – принятый алгоритм; индекс сверху соответствует номеру момента времени; k – настоящий момент; $k+1$ – будущий; \tilde{Q}^{k+1} – нефильТРованное решение; Q^{k+1} – решение с исправленным спектральным портретом.

В численных экспериментах удачной оказалась фильтрующая функция вида

$$\varphi(\omega) = \exp(-\xi \omega^2), \quad (5)$$

где ξ – константа.

Рассмотрим теперь процедуру распараллеливания вычислений.

Предположим, что пространство, в котором движется среда, некоторым образом делится на части и каждая из этих частей закрепляется за определенным процессором. Процедура разделения пространства на области и их распределение между процессорами называется распараллеливанием.

Распараллеливание оптимально, если затраты машинного времени на решение задачи минимальны.

До недавнего времени число процессоров в вычислительной системе измерялось

десятками и сотнями. К настоящему времени созданы вычислительные комплексы, число процессоров в которых – тысячи и десятки тысяч.

В таких случаях мы предлагаем множество процессоров рассматривать как некоторую сплошную вычисляющую среду, которая движется и сжимается там, где интенсивность вычислений выше.

Будем рассматривать две среды: реальную физическую и виртуальную вычисляющую. Поставим задачу о движении этих сред, причем движение вычисляющей среды должно быть таким, чтобы минимизировать общие затраты машинного времени.

Ограничимся многопроцессорными системами с распределенной памятью, как наиболее приспособленными для задач механики жидкостей и газов.

Для этих устройств в информационном смысле самым узким местом являются каналы для передачи данных от процессора к процессору. Их низкая пропускная способность во многих случаях существенно сдерживает быстродействие всей системы. Именно поэтому приходится придерживаться высказанного нами ранее принципа [1]: "...все процессы в каждом процессоре", суть которого в том, что все физические процессы, происходящие в некоторой области, полностью моделируются процессором, за которым закреплена эта область. Поступают таким образом, чтобы избежать распараллеливания по физическим, химическим или иным процессам, при котором не избежать передачи по каналам связи больших массивов.

Наилучшее распараллеливание удастся получить, если процессоры обмениваются лишь данными о состоянии полей на стыках между областями, так как при этом объем передаваемых данных минимальный. Эти соображения дают предварительно наилучшее разбиение пространства, при котором площадь поверхности, разделяющей процессорные области, наименьшая. В частном случае это "процессорные соты" при равномерном распределении вычислительной работы в разбиваемой области.

Предлагается следующая модель для написания движения и состояния вычисляющей среды. Пусть процессор Π_i обрабатывает область O_i объемом Ω_i и поверхностью с площадью S_i . Если ввести некоторый эквивалентный размер ℓ_i , то можно написать

$$\Omega_i = \ell_i^n; \quad S_i = 2n\ell_i^{n-1}, \quad (6)$$

где n – размерность пространства ($n=1,2,3$).

Затраты машинного времени процессором Π_i на один шаг физического времени пропорциональны трудоемкости вычислений в области O_i , которую обозначим через α_i , и объему этой области:

$$T_{com\ i} = \alpha_i \Omega_i / V_{com} = \alpha_i \ell_i^n / V_{com}, \quad (7)$$

где V_{com} – быстродействие процессоров Π_i .

Соответственно время на передачу данных через границы пропорционально поверхностной плотности передаваемых данных β_i и площади поверхности стыка данной области с окружающими областями:

$$T_{trans\ i} = \beta_i S_i / V_{trans} = \beta_i 2n\ell_i^{n-1} / V_{trans}, \quad (8)$$

где V_{trans} – пропускная способность каналов связи, соединяющих процессор Π_i с соседними процессорами.

Здесь уместно отметить, что между α_i и β_i существует связь. Во многих случаях они могут быть пропорциональны. Очевидно, затраты машинного времени при работе Π_i равны наибольшему из $T_{trans\ i}$, $T_{com\ i}$:

$$T_{lok\ i} = \max(T_{com\ i}, T_{trans\ i}), \quad (9)$$

где $T_{lok\ i}$ – локальное машинное время, которое потребуется для выполнения всех вычислений по области O_i и обмена данными с соседними областями.

Введем понятие о вычислительном давлении в области O_i :

$$p_i = -CT_{lok i} \quad (10)$$

и процессорной плотности в вычисляющей среде

$$q_i = 1/\Omega_i \quad (11)$$

Здесь C – параметр оптимизации распараллеливания.

Примем, что вычисляющая среда будет двигаться до тех пор, пока вычислительное давление в ней всюду не выровняется. Очевидно, что получаемое при этом распараллеливание будет оптимальным, так как уравниваются локальные вычислительные времена для всех процессоров. Предполагается, что все процессоры в системе одинаковы.

Если число процессоров велико, то можно отбросить индекс i и перейти к континуальному описанию:

$$T_{com} = \alpha q^{-1} / V_{com}, \quad (12)$$

$$T_{trans} = \beta 2n q^{-(n-1)/n} / V_{trans}, \quad (13)$$

$$p = -CT_{lok} = -C \max(T_{com}, T_{trans}), \quad (14)$$

$$p = -C \max(\alpha q^{-1} V_{com}^{-1}, \beta 2n V_{trans}^{-1} q^{-(n-1)/n}). \quad (15)$$

Последнее выражение можно назвать уравнением состояния вычисляющей среды. Если в процессе вычислений количество процессоров не меняется, то для процессорной плотности вычисляющей среды справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(q\vec{v}) = 0, \quad (16)$$

где \vec{v} – вектор скорости, с которой движется вычисляющая среда.

Для многих случаев для определения \vec{v} будет достаточно уравнения

$$\vec{v} = -\text{grad } p. \quad (17)$$

Совокупность (15...17) полностью определяет постановку задачи о вычисляющей среде.

Однако, поскольку в некоторых случаях задача об оптимальном распараллеливании может оказаться многоэкстремальной и возникает вопрос о поиске глобального минимума, тогда (17) нужно заменить на систему

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= -\text{grad } p, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где \vec{a} – ускорение в вычисляющей среде.

Для реализации описанного алгоритма движения вычисляющей среды удобен метод частиц в ячейках, изложенный в [2].

Отметим, что при использовании этого метода число "частиц" взятых для расчета, может быть существенно меньше числа фактически работающих процессоров.

При расчете движения процессорной среды пересчет трудоемкости вычислений α и плотности передаваемых данных β на расчетной сетке нужно производить с частотой один раз на N шагов по времени. N и C подбираются.

Результаты численных экспериментов по распараллеливанию течений, осложненных физико-химическими процессами, позволяют надеяться, что предложенный нами подход к процедуре распараллеливания перспективен.

ВЫВОДЫ

1. Предложены приемы для распространенных технологических процессов, улучшающие качество их компьютерных моделей.

2. Рассмотрены вопросы распараллеливания вычислений при постановке этих моделей на многопроцессорных вычислительных системах и компьютерных сетях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нурджин Н.В., Пекунов В.В., Сидоров С.Г., Чернышева Л.П., Ясинский Ф.Н. Опыт распараллеливания вычислений для моделей процессов в сплошных средах // В сб.: VIII Всероссийский съезд

по теоретической и прикладной механике. – Пермь, 2001. С.461.

2. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики // Сб. под ред. К.И. Бабенко. – М: Наука, 1979. С.295.

Рекомендована кафедрой прикладной математики и информационных технологий ИГТА. Поступила 31.03.03.
